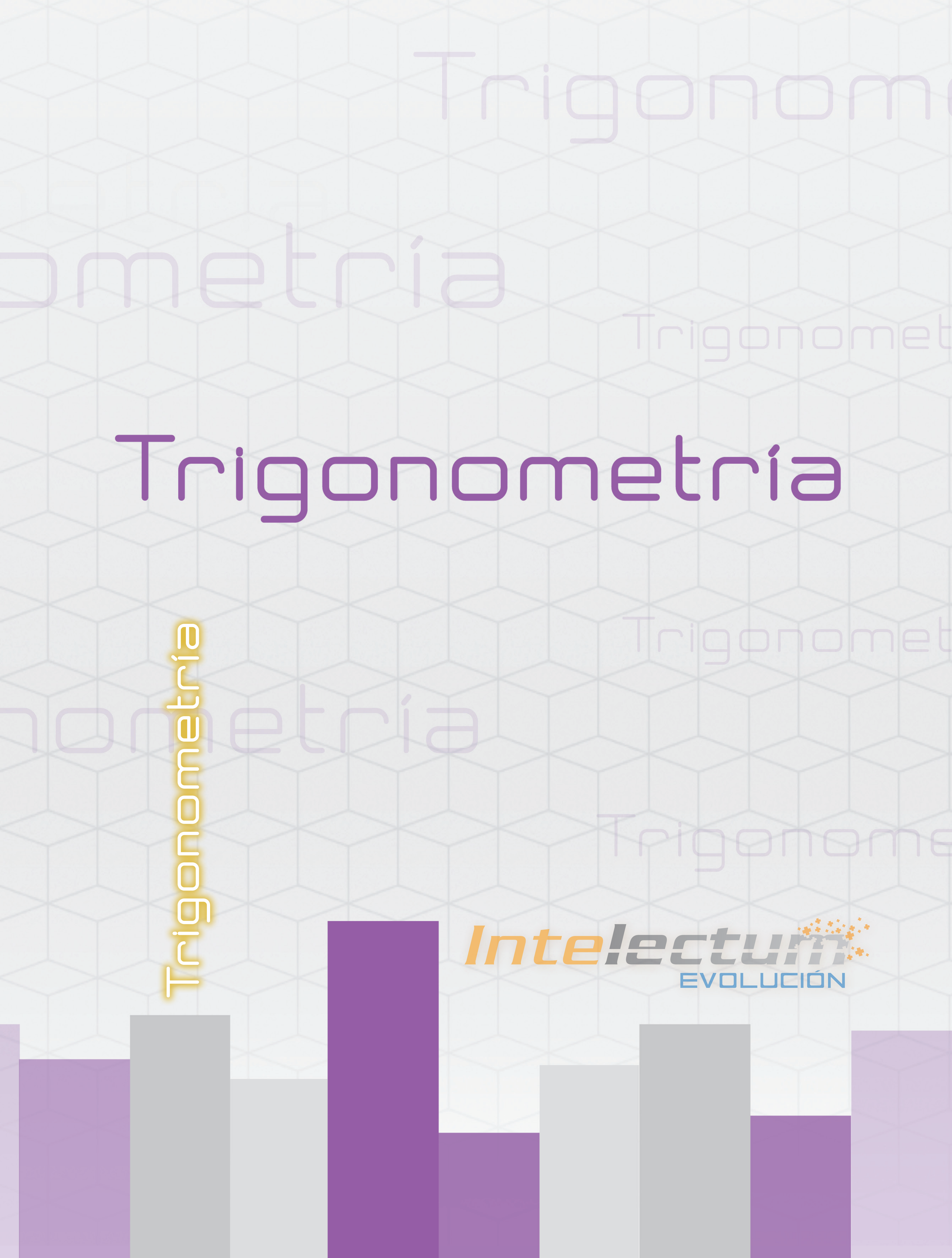

Trigonometría
Trigonometría
Intelectum
EVOLUCIÓN



Indicadores de logro

Unidad 1

- Reconoce la posición final, inicial y el vértice del ángulo trigonométrico.
- Identifica el sentido de giro del ángulo (positivo y negativo).
- Aplica las equivalencias entre los sistemas de medición para calcular la medida del ángulo pedido.
- Discrimina entre sistema sexagesimal, centesimal y radial.
- Identifica los elementos de un sector circular para el cálculo de su área.
- Calcula el área del sector circular identificando sus elementos y aplicando sus propiedades.
- Identifica al ángulo agudo dentro de un triángulo rectángulo y define cada una de las razones trigonométricas.
- Determina las razones trigonométricas de ángulos agudos identificando sus elementos.
- Reconoce los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.
- Utiliza fórmulas de manera adecuada para la demostración de problemas, usando las diferentes razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

Unidad 2

- Discrimina entre ángulos de elevación y depresión.
- Calcula el valor de los ángulos horizontales y verticales.
- Determina ángulos de elevación y depresión en función a sus razones trigonométricas.
- Identifica los pares ordenados, las intersecciones con los ejes y el origen de coordenadas.
- Calcula la ecuación de la recta así como su pendiente o el ángulo entre dos rectas utilizando puntos coordenados en el plano cartesiano.
- Define cada una de las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal.
- Determina el valor de las razones trigonométricas de ángulos coterminales.
- Identifica el cuadrante al cual pertenece cada ángulo y la forma de reducción.
- Aplica los casos estudiados para la reducción de ángulos.
- Identifica el cuadrante al cual pertenece el ángulo y realiza la reducción utilizando las relaciones dadas.

EL SONIDO Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la física el sonido es el fenómeno de propagación de ondas elásticas a través de un fluido que genera el movimiento ondulatorio de un cuerpo determinado.

Por ejemplo cuando vibran las cuerdas de un charango, estas vibraciones producen un choque de las moléculas del aire unas con otras, ocasionando zonas de comprensión y descompresión atmosférica. Si continuamos rasgando las cuerdas, se van formando sucesiones de compresión y descompresión, y cuando estas sucesiones llegan al oído, producen una vibración en el tímpano que causa la sensación de sonido. La función matemática que mejor representa la propagación del sonido es la función seno.



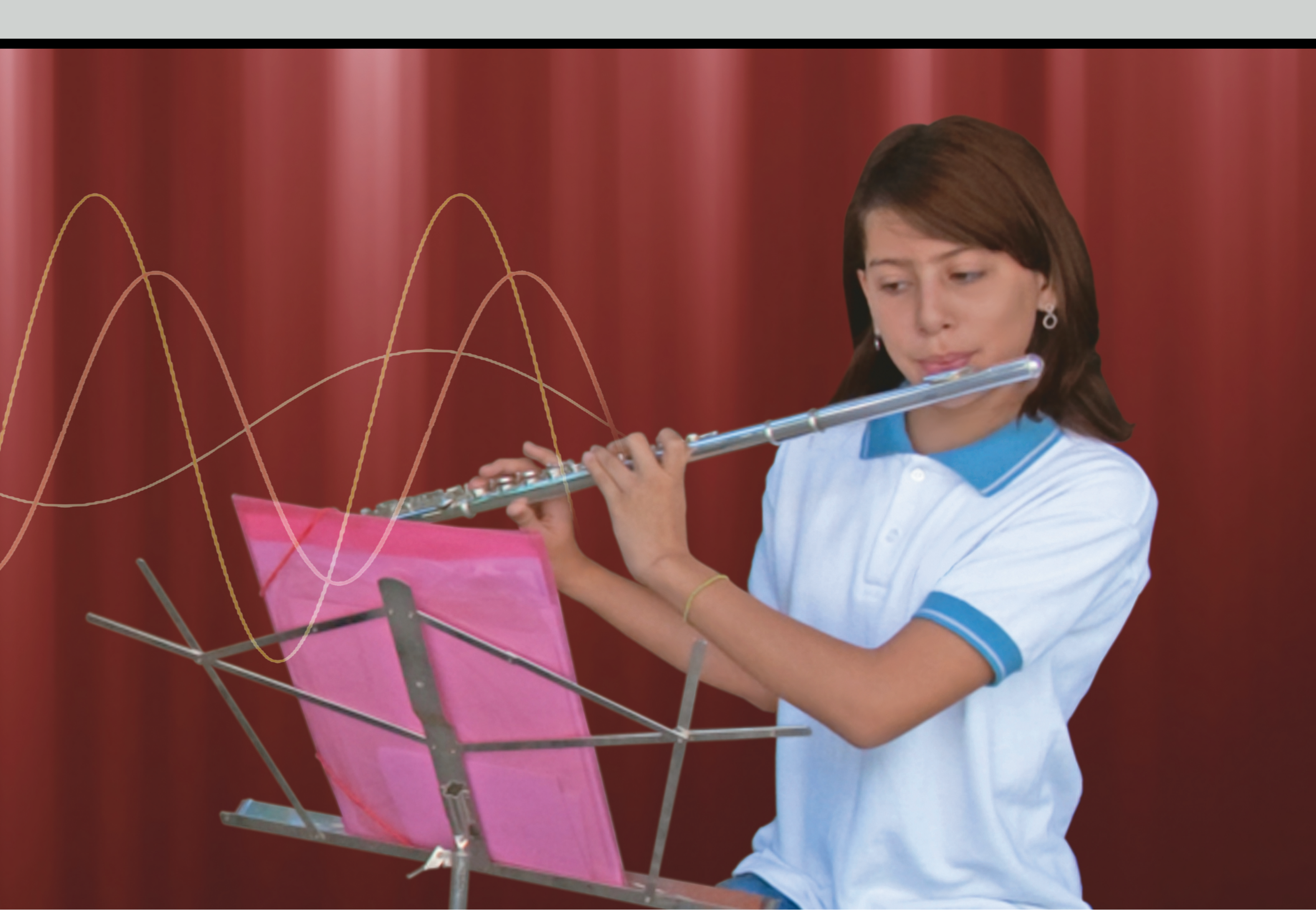
Contenido:

Unidad 3

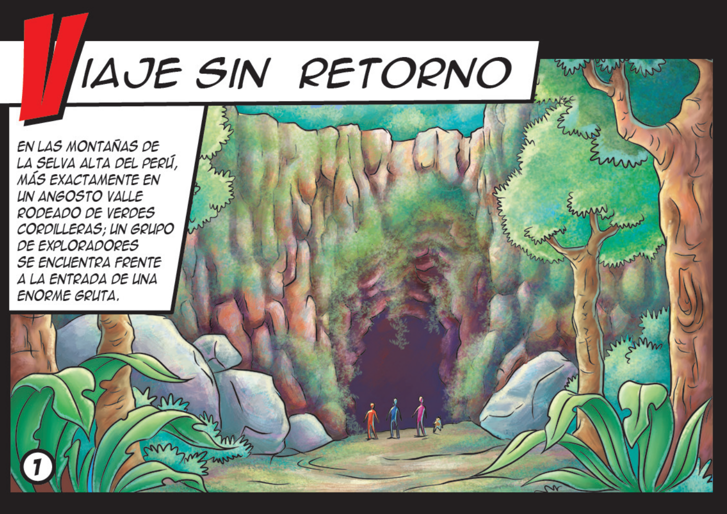
- Describe los elementos de una circunferencia trigonométrica (origen de arcos, origen de complementos y suplementos).
- Representa gráficamente cada línea trigonométrica y analiza su variación.
- Discrimina entre las identidades fundamentales (recíprocas y pitagóricas) y auxiliares.
- Encuentra el valor de las identidades trigonométricas fundamentales y auxiliares, de un ángulo orientado.
- Identifica las identidades de suma y diferencia de dos ángulos.
- Demuestra igualdades de expresiones utilizando las identidades trigonométricas.
- Reconoce las identidades de ángulo doble, ángulo mitad y ángulo triple.
- Comprende la división de las transformaciones trigonométricas (de suma o diferencia a producto o viceversa).

Unidad 4

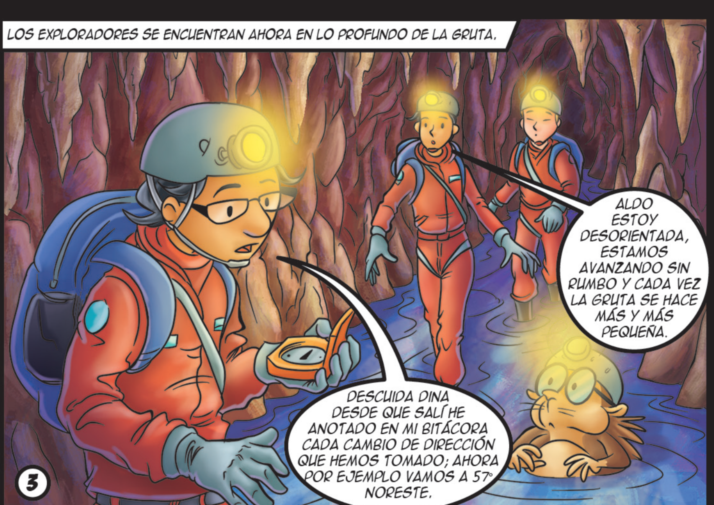
- Analiza las funciones trigonométricas e identifica el dominio y rango.
- Discrimina entre función par, impar, creciente, decreciente y periódica.
- Define las funciones inyectivas y sobreyectivas.
- Identifica cada una de las funciones inversas, y evalúa su domino y rango.
- Determina el dominio y rango de las funciones trigonométricas y de las funciones inversas dadas.
- Identifica los elementos de una ecuación trigonométrica y analiza su resolución.
- Calcula el valor de la variable, aplicando propiedades de razones trigonométricas y el valor de sus respectivos dominios.
- Nombra las relaciones dadas de la ley de senos, ley de cosenos, ley de proyecciones y ley de tangentes.
- Aplica la ley de senos, ley de cosenos, ley de proyecciones y ley de tangentes en la resolución de triángulos oblicuángulos.



VIAJE SIN RETORNO



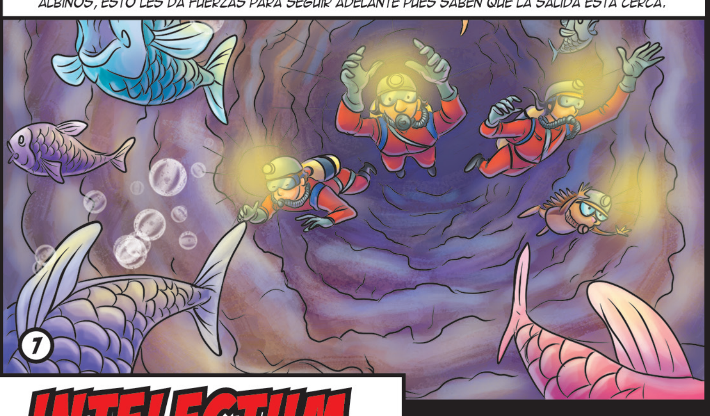


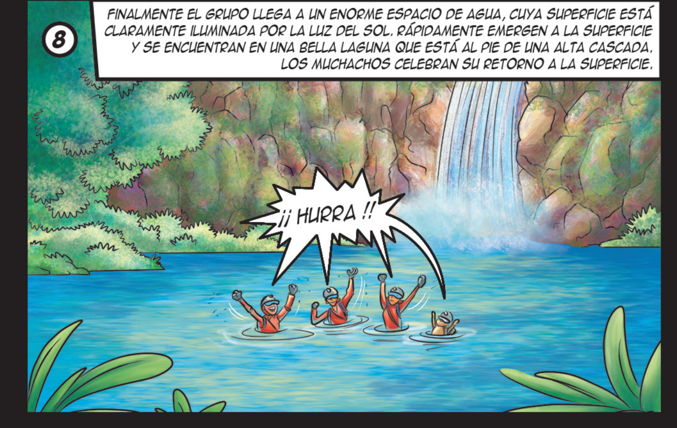










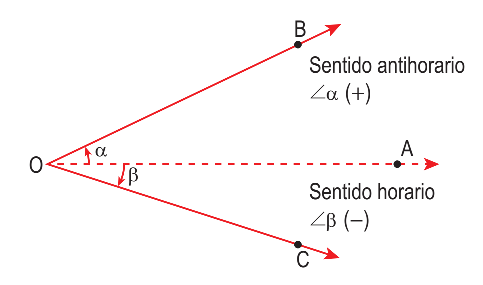




ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO
SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

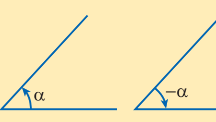
Es el ángulo que se genera por la rotación de un rayo sobre un plano alrededor de un punto fijo llamado vértice. Si la rotación es en sentido antihorario, el ángulo se considera positivo; si gira en sentido horario, el ángulo se considera negativo.



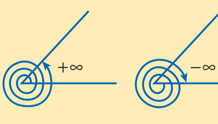
$\overline{OA}$: posición inicial
$\overline{OC}$; $\overline{OB}$: posición final
O: vértice del ángulo
α, β: ángulos trigonométricos

Recuerda

Si hay un cambio en el sentido de rotación, el signo del ángulo también cambia.



Un ángulo trigonométrico puede adquirir cualquier magnitud sin restricción.



$-\infty < m\angle\text{trigonométrico} < +\infty$



SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

La medida de un ángulo puede estar determinada en diferentes sistemas, de los cuales se definen tres sistemas convencionales:

1. Sistema sexagesimal

Tiene como unidad el grado sexagesimal (1°) donde:

$$\frac{m\angle 1\text{ vuelta}}{360} = 1^\circ \text{ ; entonces } m\angle 1\text{vuelta} = 360^\circ$$

Tiene como subunidades

1': minuto sexagesimal
1": segundo sexagesimal

Y se definen como:

1° <> 60' ; 1' <> 60" ; 1° <> 3600"

2. Sistema centesimal

Tiene como unidad el grado centesimal (1^g) donde:

$$\frac{m\angle 1\text{ vuelta}}{400} = 1^g \text{ ; entonces } m\angle 1\text{vuelta} = 400^g$$

Tiene como subunidades

1^m: minuto centesimal
1^s: segundo centesimal

Y se definen como:

$1^g <> 100^m$; $1^m <> 100^s$; $1^g <> 10\,000^s$

3. Sistema radial

Tiene como unidad al radián (1 rad) definido como la medida del ángulo al que le corresponde una longitud de arco igual al radio de la circunferencia, donde:

$$\frac{m\angle 1\text{ vuelta}}{2\pi} = 1\text{ rad} \text{ ; entonces } m\angle 1\text{vuelta} = 2\pi\text{ rad}$$

Algunos valores de π:

$\pi \cong 3{,}1416$	$\pi \cong \frac{22}{7}$	$\pi \cong \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Observación

En los sistemas sexagesimal y centesimal, los ángulos pueden denotarse:

Notación decimal $\begin{cases}(abc, efg)^\circ \\ (xyz, mnq)^g\end{cases}$

Notación en ángulos, minutos y segundos $\begin{cases}s^\circ\ t'\ u'' \\ r^g\ p^m\ z^s\end{cases}$

Donde:
s, t, u, r, p, z son enteros

Además:
t, u ∈ [0; 60⟩
p, z ∈ [0;100⟩



RELACIÓN ENTRE SISTEMAS

> **Importante**
>
> **Corolario**
> - De la fórmula de conversión:
>
> $$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi}$$
>
> - Para las subunidades sexagesimales
> $m\angle\alpha = S° = 60S' = 3600S''$
> $S \Rightarrow$ n.° de grados
> $60S \Rightarrow$ n.° de minutos
> $3600S \Rightarrow$ n.° de segundos
>
>   Centesimales
> $m\angle\alpha = C^g = 100C^m$
> $= 10\,000C^s$
> $C \Rightarrow$ n.° de grados
> $100C \Rightarrow$ n.° de minutos
> $10\,000C \Rightarrow$ n.° de segundos



Siendo:
S: número de grados sexagesimales del ángulo θ
C: número de grados centesimales del ángulo θ
R: número de radianes del ángulo θ

(Figura: ángulo θ con medidas S°, C^g, R rad)

Equivalencias
(Método del factor común)

$$\frac{m\angle 1\text{ vuelta}}{2} = 180° = 200^g = \pi \text{ rad}$$

Fórmula de conversión

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Para convertir un ángulo de un sistema a otro, tanto las equivalencias como las fórmulas de conversión pueden ser usadas.

Ejemplo:
Convierte 60° a radianes.

A) Equivalencias:

$60° = 60° \times 1 = 60° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ rad

B) Fórmula de conversión:

$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$; dato: $S = 60°$

$R = \frac{\pi}{3}$ $\quad \therefore 60° = \frac{\pi}{3}$ rad

Corolario de equivalencias

1. $180° = 200^g$ — Simplificando tenemos $\boxed{9° = 10^g}$

2. $9° = 10^g$
   $9 \times 1° = 10 \times 1^g$
   $9 \times 60' = 10 \times 100^m$ — Simplificando tenemos $\boxed{27' = 50^m}$

3. $27' = 50^m$
   $27 \times 1' = 50 \times 1^m$
   $27 \times 60'' = 50 \times 100^m$ — Simplificando tenemos $\boxed{81'' = 250^m}$

EFECTUAR



1. Simplifica: $E = \frac{2S + 3C}{2S - C}$
   donde S y C son lo convencional.

2. Calcula: $A = \frac{C + S}{C - S} - 3$
   siendo S y C lo convencional.

3. Calcula el valor de: $E = \frac{3S - C}{C - S}$
   siendo S y C lo convencional.

4. Halla el valor de m en:
   $\frac{1}{S} + \frac{1}{C} = m\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{C}\right)$

5. Reduce: $\sqrt{\frac{2C + S}{C - S} + 7}$

6. Simplifica: $\sqrt{\frac{2S + C}{C - S} - 3}$

7. Calcula: $E = \frac{20R + \pi C + \pi S}{200R}$
   siendo S, C y R lo convencional.

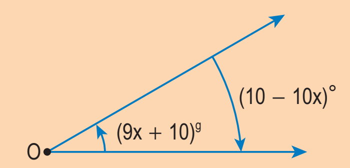
8. Si S, C y R representan los números de los sistemas conocidos, calcula:
   $E = \frac{\pi S + \pi C + 20R}{2\pi S - \pi C + 40R}$

9. Reduce: $\frac{\pi(S + C) + 20R}{\pi(C - S) + 20R}$

10. Expresa: $\frac{\pi}{10}$ rad en el sistema sexagesimal.

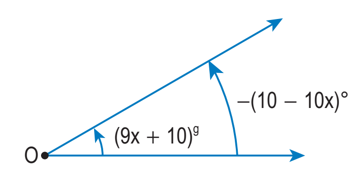
Problemas resueltos

1 Del ángulo trigonométrico, halla x.



Resolución:

Colocando el ángulo en sentido antihorario:



$\Rightarrow (9x+10)^g = -(10-10x)°$

$(9x+10)^g.\left(\dfrac{9°}{10^g}\right) = -(10-10x)°$

$9(9x+10) = -10(10-10x)$

$81x + 90 = -100 + 100x$

$190 = 19x$

$\Rightarrow x = 10$

2 Convierte 11°15' a radianes.

Resolución:

$11°15' = 11° + 15'\left(\dfrac{1°}{60'}\right) = 11° + \dfrac{1°}{4} = \dfrac{45°}{4}$

$\dfrac{45°}{4}\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \dfrac{45\pi}{4\times 180} \text{ rad} = \dfrac{\pi}{16} \text{ rad}$

$\Rightarrow 11°15' = \dfrac{\pi}{16} \text{ rad}$

3 Calcula:

$$M = \frac{\frac{\pi}{12}\text{ rad} + 5°}{20^g}$$

Resolución:

$\dfrac{\pi}{12}\text{ rad} = \dfrac{\pi}{12}\text{ rad}\left(\dfrac{180°}{\pi \text{ rad}}\right) = \dfrac{180°}{12} = 15°$

$20^g = 20^g\left(\dfrac{9°}{10^g}\right) = \dfrac{20\times 9°}{10} = 18°$

Reemplazando en la expresión:

$M = \dfrac{(15°)+5°}{(18°)} = \dfrac{20°}{18°} = \dfrac{10}{9}$

$\therefore M = \dfrac{10}{9}$

4 La suma de dos ángulos es 40° y su diferencia es 30^g. Calcula la medida del mayor ángulo en grados sexagesimales.

Resolución:

Sean los ángulos α y β $(\alpha > \beta)$

Del enunciado: $\alpha + \beta = 40°$

$$\alpha - \beta = 30^g\underbrace{\left(\frac{9°}{10^g}\right)}_{\text{Factor de conversión}} = 27°$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \alpha+\beta = 40°\\ \quad\alpha - \beta = 27°\end{array}\right\}(+)$$

$2\alpha = 67°$

$\alpha = 33{,}5° = 33°30'$

$\therefore$ El mayor ángulo mide 33°30'.

5 Reduce: $E = \dfrac{2°3'}{3'}$

Resolución:

Convertimos 2° a minutos sexagesimales:

$$2°\underbrace{\left(\frac{60'}{1°}\right)}_{\text{Factor de conversión}} = 2(60') = 120'$$

Reemplazando en la expresión:

$E = \dfrac{2°3'}{3'} = \dfrac{2°+3'}{3'} = \dfrac{(120')+3'}{3'} = \dfrac{123'}{3'} = 41$

6 Simplifica:

$$M = \frac{3C - 2S}{2S - C}$$

Siendo: S y C lo convencional para un ángulo.

Resolución:

Sabemos $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} = k \Rightarrow S = 9k \wedge C = 10k$

Reemplazando en la expresión:

$M = \dfrac{3(10k)-2(9k)}{2(9k)-(10k)} = \dfrac{30k-18k}{18k-10k} = \dfrac{12k}{8k} = \dfrac{3}{2} \qquad \therefore M = \dfrac{3}{2}$

7 Simplifica:

$$E = \frac{2\pi S - \pi C + 40R}{\pi C - \pi S}$$

Siendo S, C y R lo convencional para un ángulo.

Resolución:

Sabemos: $\dfrac{S}{9} = \dfrac{C}{10} = \dfrac{20R}{\pi} = k \Rightarrow S = 9k,\ C = 10k \text{ y } 20R = \pi k$

Reemplazando en la expresión:

$E = \dfrac{2\pi(9k) - \pi(10k) + 2(\pi k)}{\pi(10k) - \pi(9k)}$

$E = \dfrac{18\pi k - 10\pi k + 2\pi k}{10\pi k - 9\pi k} = \dfrac{10\pi k}{\pi k} = 10$

$\therefore E = 10$

SECTOR CIRCULAR

Nota

De la expresión:

$L = \theta R$

θ es un valor numérico, por lo tanto, la unidad que defina a L será la misma a la del radio.

Ejemplo:
Longitud de un arco (L) de radio 20 cm y $\frac{\pi}{2}$ rad como ángulo central.

$L = \left(\frac{\pi}{2}\right)(20)$

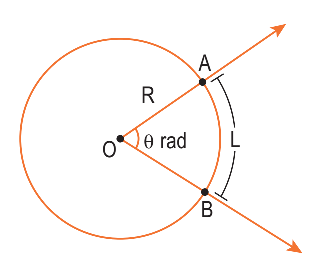
$L = 10\pi$

$\therefore$ L es igual a 10π: cm

Unidad de longitud del radio

LONGITUD DE ARCO

Es la **medida** de un arco, que a su vez, es una porción de circunferencia limitada por dos puntos y se calcula:



$L = \theta \cdot R$

Donde:

$\overset{\frown}{AB}$: arco AB

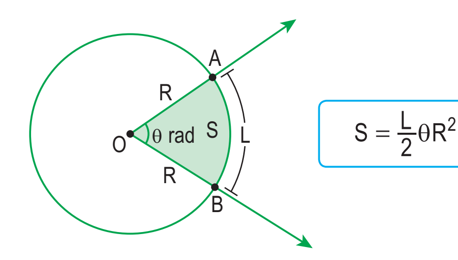
R: radio de circunferencia

θ: n.° de radianes del ángulo central

L: longitud de arco

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Es la región plana que se encuentra limitada por dos radios y un arco. El cálculo del área de un sector circular se determina con las siguientes expresiones:



$S = \frac{1}{2}\theta R^2$

$S = \frac{RL}{2}$

$S = \frac{L^2}{2\theta}$

Donde:

S: área del sector circular

θ: n.° de radianes del sector circular

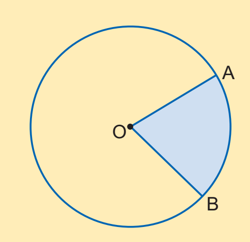
R: radio

L: longitud de arco



Recuerda

Sea el sector circular AOB

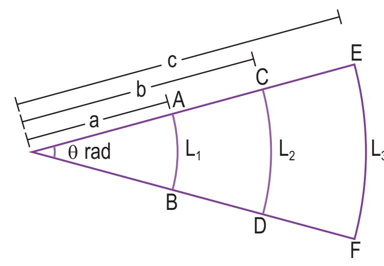


$L_{\overset{\frown}{AB}}$: longitud de arco AB

$S_{\triangleleft AOB}$: área del sector circular AOB

Propiedades

1.



$$\frac{L_1}{a} = \frac{L_2}{b} = \frac{L_3}{c}$$

Demostración:

Del gráfico: $L_1 = \theta a$, $L_2 = \theta b$; $L_3 = \theta c$

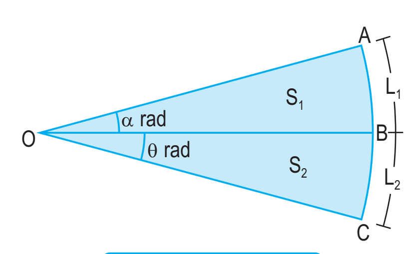
Despejando θ:

$\theta = \frac{L_1}{a}$; $\theta = \frac{L_2}{b}$; $\theta = \frac{L_3}{c}$

$\therefore \frac{L_1}{a} = \frac{L_2}{b} = \frac{L_3}{c} = \theta$

2.





$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha}{\theta}$$

Demostración:

De las expresiones de área:

$S_1 = \frac{1}{2}\alpha r^2$; $S_2 = \frac{1}{2}\theta r^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\alpha r^2}{\frac{1}{2}\theta r^2} = \frac{\alpha}{\theta}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\alpha}{\theta}$

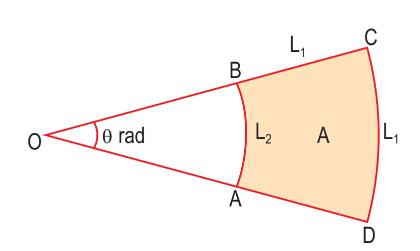
Análogamente:

$S_1 = \frac{rL_1}{2}$; $S_2 = \frac{rL_2}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{rL_1}{2}}{\frac{rL_2}{2}} = \frac{L_1}{L_2}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha}{\theta}$

TRAPECIO CIRCULAR

Región formada por la diferencia de dos sectores circulares concéntricos y de radios distintos.

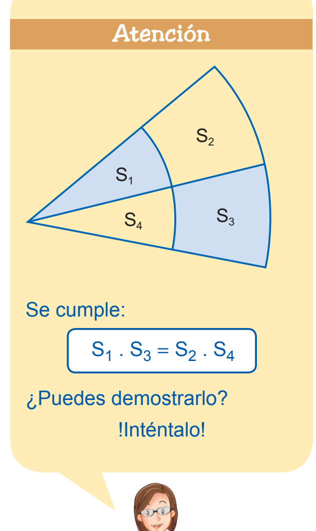


Valor numérico del ángulo central

$$\theta = \frac{L_1 - L_2}{h}$$

Área del trapecio circular

$$A = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)h$$



Atención

Se cumple:

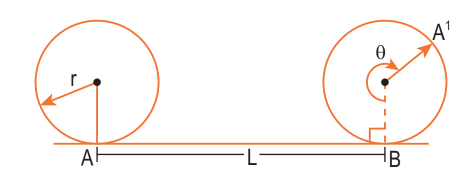
$$S_1 \,.\, S_3 = S_2 \,.\, S_4$$

¿Puedes demostrarlo?

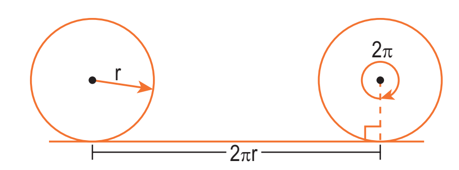
!Inténtalo!

APLICACIÓN DE LONGITUD DE ARCO

Cuando una rueda gira sobre una superficie plana desde un punto A hasta una posición B se tiene:



A medida que la rueda gira, un radio genera un ángulo θ.



Observa que cuando el centro de la rueda avanza una longitud igual a 2πr, la rueda ha dado una vuelta.

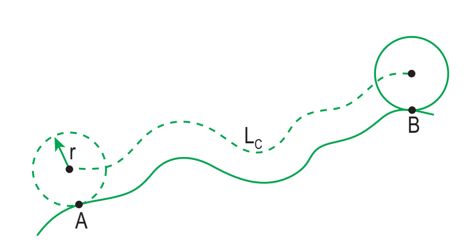
Para el cálculo del número de vueltas (n) usamos una regla de tres simple.

1 vuelta ——— 2πr
n vueltas ——— L

$$\Rightarrow (1)(L) = (n)(2\pi r) \qquad \therefore \quad n = \frac{L}{2\pi r}$$

En general

El número de vueltas que da una rueda sobre cualquier superficie se calcula mediante la siguiente expresión:



$$n_v = \frac{L_c}{2\pi r}$$

n_v: número de vueltas que da la rueda desde A hasta B

L_c: longitud recorrida por el centro

Observación

También podemos calcular L_c (longitud recorrida por el centro desde A hacia B):

$$L_c = \theta_g r$$

Donde:

θ_g : número de radianes que gira la rueda

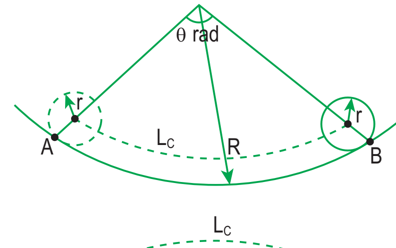
r : radio de la rueda

En consecuencia:

$$\theta_g = \frac{L_c}{r} \qquad \theta_g = n_v \,.\, 2\pi$$



Casos particulares



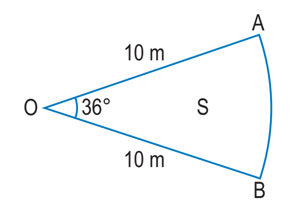
$$n_v = \frac{\theta(R - r)}{2\pi r}$$

$$n_v = \frac{\theta(R + r)}{2\pi r}$$

Problemas resueltos

1 Halla el área de un sector circular, cuyo ángulo central mide 36° y el radio 10 m.

Resolución:



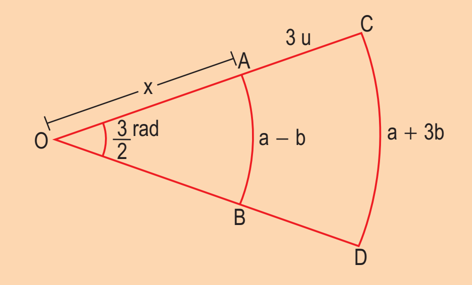
$\theta = 36° = 36°\left(\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}\right) = \dfrac{\pi}{5}$ rad

r = 10 m

$S = \dfrac{\theta . r^2}{2} = \dfrac{\left(\frac{\pi}{5}\right)(10)^2}{2} = 10\pi$

Por lo tanto: $S = 10\pi \text{ m}^2$

2 Si $3L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{CD}} = 12$, calcula x.



Resolución:

Por dato:

$3L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{CD}} = 3(a - b) + a + 3b = 12$

$\Rightarrow 3a - 3b + a + 3b = 12$

$4a = 12$

$a = 3$

Por propiedad, en el trapecio ABCD:

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{(a + 3b) - (a - b)}{3}$

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{a + 3b - a + b}{3}$

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{4b}{3}$

$b = \dfrac{9}{8}$ u

Finalmente:

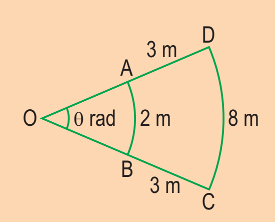
$\dfrac{3}{2}x = a - b$

$\dfrac{3}{2}x = 3 - \dfrac{9}{8}$

$\dfrac{3}{2}x = \dfrac{15}{8}$

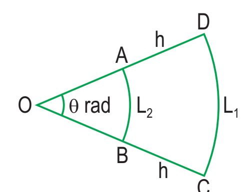
$\therefore x = \dfrac{5}{4}$ u

3 Halla θ.



Resolución:

Por la propiedad del trapecio circular:

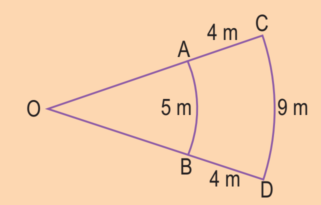


$\theta = \dfrac{L_1 - L_2}{h}$

Entonces:

$\theta = \dfrac{8 - 2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ rad

4 Halla el área en la región sombreada.



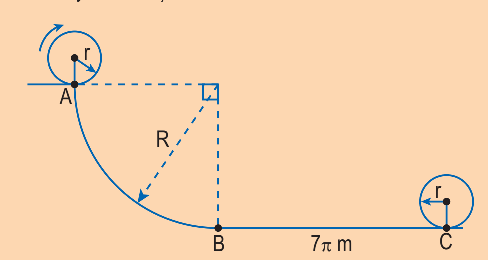
Resolución:

La figura sombreada es un trapecio circular.

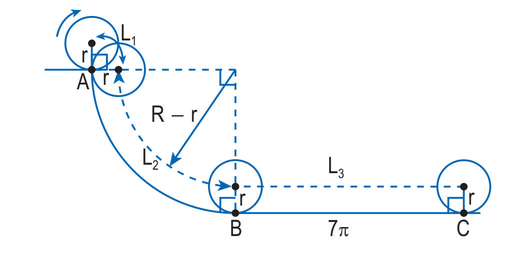
$\left.\begin{aligned} L_1 &= 9 \text{ m} \\ L_2 &= 5 \text{ m} \\ h &= 4 \text{ m} \end{aligned}\right\} \quad A = \left(\dfrac{L_1 + L_2}{2}\right)h = \left(\dfrac{9 + 5}{2}\right)4 = 28$

Por lo tanto, el área sombreada mide 28 m^2.

5 Halla el número de vueltas que da la rueda, al ir de A hasta C. (R = 10 m y r = 2 m)



Resolución:



La longitud que recorre el centro: $L_C = L_1 + L_2 + L_3$

$L_1 = \theta_1 . r = (\pi / 2)(2) = \pi$

$L_2 = \theta_2 (R - r) = (\pi / 2)(10 - 2) = (\pi / 2)\, 8 = 4\pi$

$L_3 = BC = 7\pi \Rightarrow L_c = \pi + 4\pi + 7\pi = 12\pi$

$\Rightarrow$ n.° de vueltas: $n = \dfrac{Lc}{2\pi r} = \dfrac{12\pi}{2\pi(2)} = \dfrac{12\pi}{4\pi} = 3$

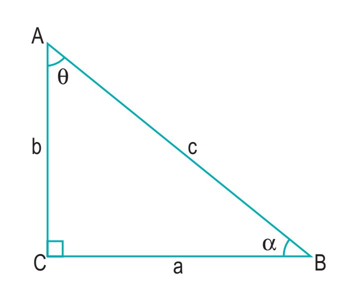
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

T

INTRODUCCIÓN

Triángulo rectángulo

Son todos los triángulos en donde uno de sus ángulos es recto. Entre sus elementos tenemos:

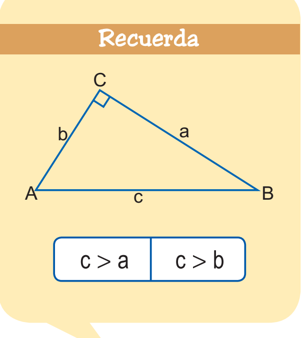


Catetos: $AC = b \wedge CB = a$

Hipotenusa: $AB = c$

Ángulos agudos: $m\angle CAB = \theta \ \wedge \ m\angle CBA = \alpha$

Recuerda



c > a	c > b

Observaciones

En todo triángulo rectángulo se tiene que sus ángulos agudos son complementarios es decir:

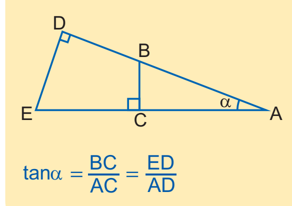
$$\alpha + \theta = 90°$$

En todo triángulo rectángulo la medida de sus lados cumplen el teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Observación

Las razones trigonométricas no dependen del triángulo que contiene al ángulo, solo de su medida.

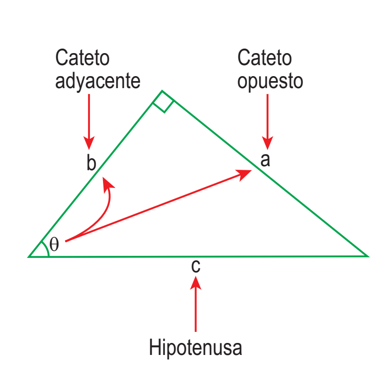


$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AD}$$



CÁLCULO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para ángulos agudos, el cálculo de las razones trigonométricas se realiza con el ángulo contenido en un triángulo rectángulo y estableciendo la relación entre la medida de sus lados tomados de dos en dos.



Nombre	Definición
seno de theta	$\text{sen}\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
coseno de theta	$\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
tangente de theta	$\tan\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{a}{b}$
cotangente de theta	$\cot\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{b}{a}$
secante de theta	$\sec\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
cosecante de theta	$\csc\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a}$

Razones trigonométricas recíprocas

Si el producto de dos razones trigonométricas de un mismo ángulo es igual a la unidad, estas se denominan recíprocas. De las definiciones de razones trigonométricas observamos:

$$\text{sen}\theta\csc\theta = 1 \begin{cases} \text{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} \\ \csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\theta} \end{cases} \qquad \cos\theta\sec\theta = 1 \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \\ \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \end{cases} \qquad \tan\theta\cot\theta = 1 \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

Nota

Sean x e y ángulos agudos, si se cumple:

$\text{sen}x\csc y = 1$

$\cos x\sec y = 1$

$\tan x\cot y = 1$

$\Rightarrow x = y$

Recuerda

co-razón

seno → coseno
tangente → cotangente
secante → cosecante



Observación

Otros triángulos notables:

$\sqrt{10}a$, $\frac{143°}{2}$, a, $37°/2$, 3a

$\sqrt{5}a$, $\frac{127°}{2}$, a, $53°/2$, 2a

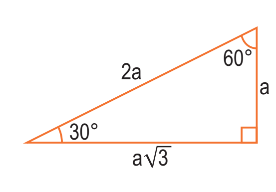
$5\sqrt{2}a$, 82°, a, 8°, 7a

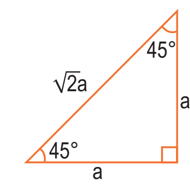
Razones trigonométricas de ángulos complementarios

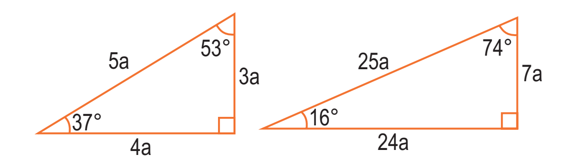
Las razones trigonométricas de todo ángulo, son respectivamente iguales a las co-razones de su complemento.

$$RT(\theta) = \text{co-}RT(90° - \theta) \begin{cases} \text{sen}\theta = \cos(90° - \theta) \\ \tan\theta = \cot(90° - \theta) \\ \sec\theta = \csc(90° - \theta) \end{cases}$$

Triángulos rectángulos notables





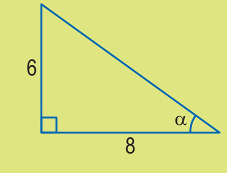


	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
16°	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{7}$
74°	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{25}{24}$

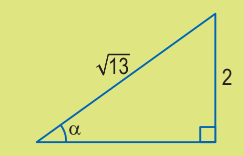
EFECTUAR



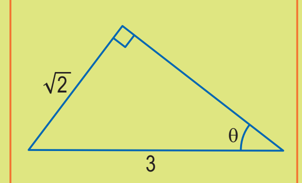
1. Halla: senα



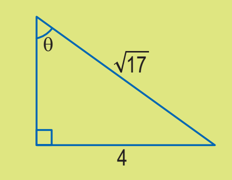
2. Calcula: cosα



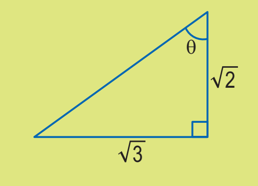
3. Calcula: tanθ



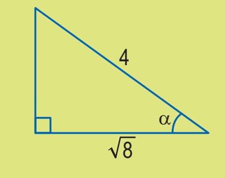
4. Calcula: cotθ



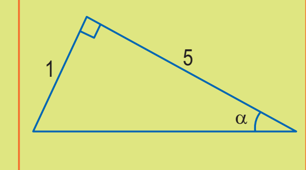
5. Calcula: secθ



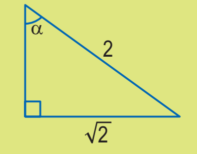
6. Calcula: cscα



7. Calcula: senα



8. Calcula: tanα



Problemas resueltos

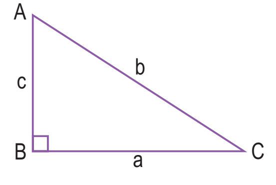
1 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, calcula
H = senA tanC secA

Resolución:

$\text{sen}A = \dfrac{co}{h} = \dfrac{a}{b}$

$\tan C = \dfrac{co}{ca} = \dfrac{c}{a}$

$\sec A = \dfrac{h}{ca} = \dfrac{b}{c}$



Reemplazando en la expresión:

$H = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{abc}{abc} = 1$

$\therefore H = 1$

2 Si $\cot\theta = \dfrac{1}{3}$, halla el valor de la expresión:

$B = \dfrac{\tan^3\theta + 3}{2\tan\theta}$; (θ: agudo)

Resolución:

Sabemos: $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)} = 3 \Rightarrow \tan\theta = 3$

Reemplazando en la expresión:

$B = \dfrac{(3)^3 + 3}{2(3)} = \dfrac{27+3}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$

3 Si x < 60°; calcula $M = (\cos 3x + \text{sen}(x + 10°))^2$
Si se cumple: sen(x + 20°) = cos(x + 30°)

Resolución:

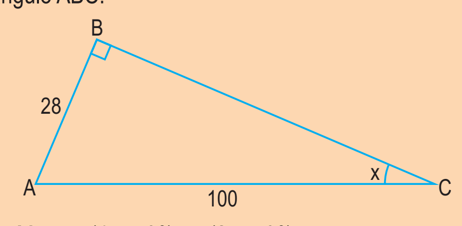
Dato:
sen(x + 20°) = cos(x + 30°)
$30° + x < 90° \;\wedge\; x + 20° < 90°$

Por propiedad de ángulos complementarios:
x + 20° + x + 30° = 90°
2x = 40°
x = 20°

Luego:
$M = (\cos 3x + \text{sen}(x + 10°))^2$
$M = (\cos 60° + \text{sen}30°)^2$

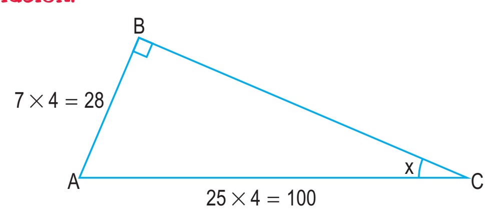
$M = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)^2$ $\therefore M = 1$

4 Del triángulo ABC:



Calcula: M = tan(4x + 3°) tan(2x – 9°)

Resolución:

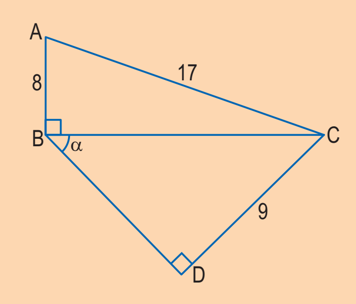


Luego:
⊿ABC notable de 16° y 74°
x = 16°

En M:
M = tan(4x + 3°) tan(2x – 9°)
M = tan67°tan23°

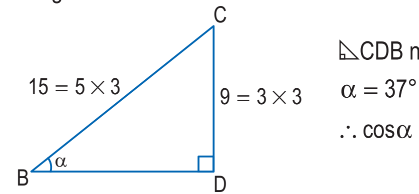
Además, 67° y 23° complementarios ⇒ tan23° = cot67°
Luego: M = tan67°cot67
Por propiedad de razones recíprocas: M = 1

5 Calcula: cosα



Resolución:

En el ⊿ABC, aplicamos el teorema de Pitágoras:
$(17)^2 = BC^2 + 8^2$
$BC^2 = 17^2 - 8^2$
BC = 15
Luego:



⊿CDB notable de 37° y 53°:
α = 37°
$\therefore \cos\alpha = \cos 37° = \dfrac{4}{5}$

6 Calcula:

$\sqrt{\sqrt{3}\cot\dfrac{37°}{2}\cot 60° + \sec^2 45° + \cot 8° \sec 74° - 3\sec 53°}$

Resolución:

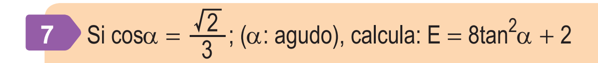
$M = \sqrt{\sqrt{3}\cot\dfrac{37°}{2}\cot 60° + \sec^2 45° + \cot 8° \sec 74° - 3\sec 53°}$

$M = \sqrt{\sqrt{3} \times 3 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{2})^2 + 7 \times \dfrac{25}{7} - 3 \times \dfrac{5}{3}}$

$M = \sqrt{3 + 2 + 25 - 5}$

$M = \sqrt{25}$ $\therefore M = 5$

7 Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$; ($\alpha$: agudo), calcula: $E = 8\tan^2\alpha + 2$



Resolución:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$

(Triángulo rectángulo: hipotenusa $3a$, cateto opuesto $a\sqrt{7}$, cateto adyacente $a\sqrt{2}$, ángulo α)

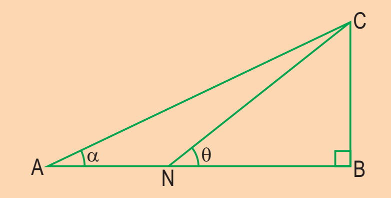
$$\tan\alpha = \frac{co}{ca} = \frac{a\sqrt{7}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

Reemplazando en la expresión:

$$E = 8\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 2 = 8\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = 30$$

$\therefore E = 30$

8 En la figura adjunta: $\tan\alpha = \frac{5}{8}$. Si BN = 2AN, calcula $\cot\theta$.



Resolución:

$\tan\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow$

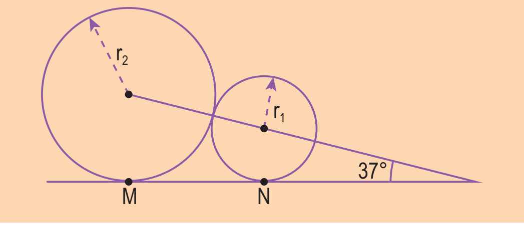
(Triángulo: A, N, B, C; AN = d, NB = 2d, AB = 8k, BC = 5k)

Del gráfico: $3d = 8k \Rightarrow d = \frac{8}{3}k$

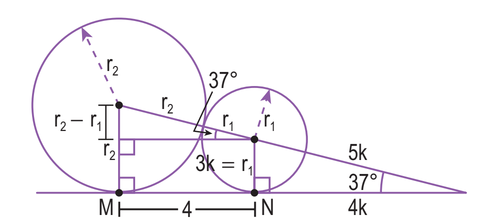
$$\text{Piden: } \cot\theta = \frac{2d}{5k} = \frac{2\left(\frac{8}{3}k\right)}{5k} = \frac{16k}{15k} = \frac{16}{15}$$

$\therefore \cot\theta = \frac{16}{15}$

9 Del gráfico, halla $r_1^2 + r_2^2$. Siendo M y N puntos de tangencia, además MN = 4.



Resolución:



Por semejanza:

$$\frac{4k}{4} = \frac{5k}{r_1 + r_2}$$

$\Rightarrow r_1 + r_2 = 5$

Entonces:

$$\Rightarrow \begin{rcases} r_2 - r_1 = 3 \\ r_2 + r_1 = 5 \end{rcases} (+)$$

$2r_2 = 8$

$r_2 = 4$

$\Rightarrow r_1 = 1$

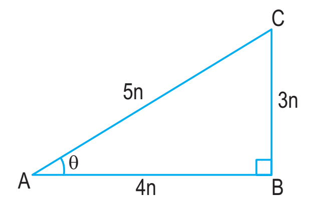
Luego:

$r_1^2 + r_2^2 = 1^2 + 4^2 = 17$

10 Si $\text{sen}\theta = 0,6$: (θ = agudo), calcula:

$$F = \tan\left(\frac{90° - \theta}{2}\right) + \cot\left(\frac{180° - \theta}{2}\right) + \sec(90° - \theta)$$

Resolución:



El ángulo θ es agudo, además:

$\text{sen}\theta = 0,6 = \frac{3}{5}$

⊿ABC notable de 37° y 53°

$\Rightarrow \theta = 37°$

En F:

$$F = \tan\left(\frac{90° - \theta}{2}\right) + \cot\left(\frac{180° - \theta}{2}\right) + \sec(90° - \theta)$$

$$F = \tan\left(\frac{90° - 37°}{2}\right) + \cot\left(\frac{180° - 37°}{2}\right) + \sec(90° - 37°)$$

$$F = \tan\frac{53°}{2} + \cot\frac{143°}{2} + \sec 53°$$

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}$$

$\therefore F = 2,5$



T

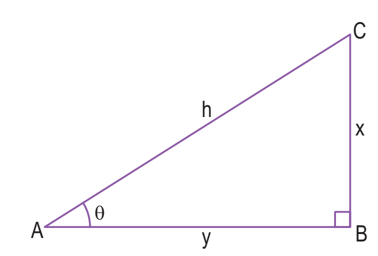
DEFINICIÓN

Es el procedimiento mediante el cual se determinan los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo a partir de otros elementos conocidos.
En este caso, básicamente se tratará de calcular los lados desconocidos de un triángulo rectángulo en función de un lado y un ángulo, ambos conocidos.

Se presentan tres casos los cuales son:

CASOS

Conocidos un ángulo agudo (θ) y la hipotenusa (h)

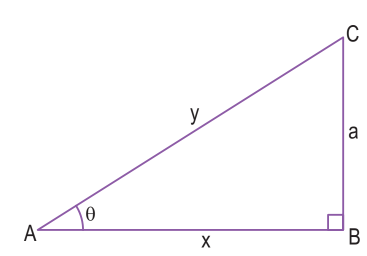


De la figura:

$$\frac{x}{h} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow x = h\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{y}{h} = \cos\theta \Rightarrow y = h\cos\theta$$

Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto opuesto (a)

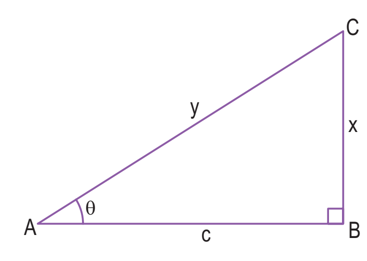


De la figura:

$$\frac{x}{a} = \cot\theta \Rightarrow x = a\cot\theta$$

$$\frac{y}{a} = \csc\theta \Rightarrow y = a\csc\theta$$

Conocidos un ángulo agudo (θ) y su cateto adyacente (c)

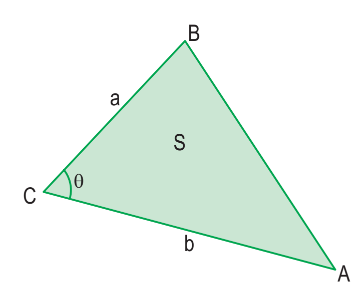


De la figura

$$\frac{x}{c} = \tan\theta \Rightarrow x = c\tan\theta$$

$$\frac{y}{c} = \sec\theta \Rightarrow y = c\sec\theta$$

ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR



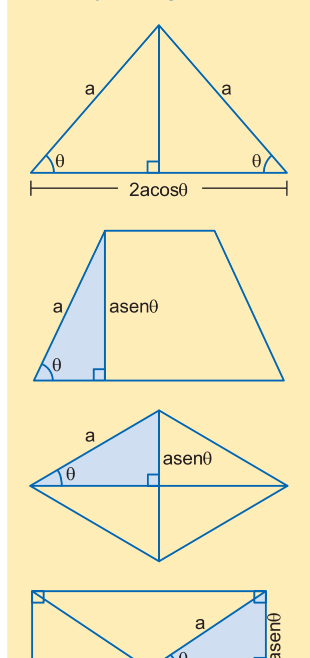
S: área de la región triangular ABC

Del gráfico:

$$S = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Importante

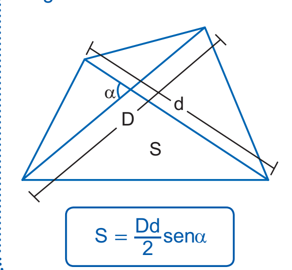
La resolución de triángulos rectángulos permite calcular los elementos de un triángulo isósceles ya que se puede descomponer en triángulos rectángulos, así como también los elementos de trapecios, rombos y rectángulos.





Nota

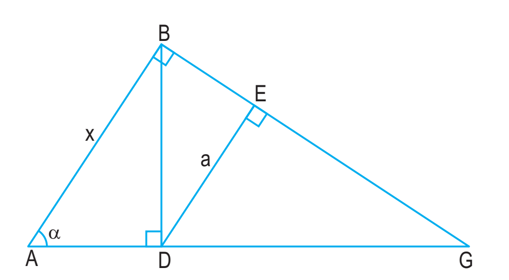
El área de una región cuadrangular está dada por el semiproducto de sus diagonales multiplicado por el seno del ángulo que forman dichas diagonales.



$$S = \frac{Dd}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplos:

1. Del gráfico, determina x en términos de a y α.



Resolución:

$\triangle$DEB: $m\angle DBE = m\angle BAD = \alpha$,
además: $BD = DE\csc\alpha$
$BD = a\csc\alpha$

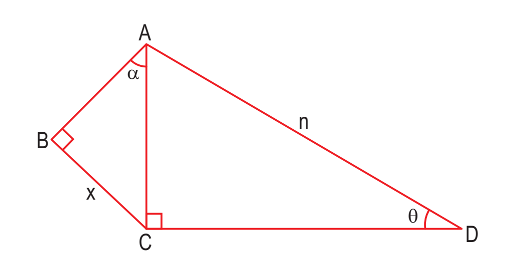
$\triangle$ADB: $AB = BD\csc\alpha$
$x = (a\csc\alpha)\csc\alpha$
$\therefore x = a\csc^2\alpha$

Atención

Resolver un triángulo rectángulo es hallar los valores desconocidos de sus lados y de sus ángulos. Para resolver un triángulo rectángulo es necesario conocer un lado y uno de sus ángulos agudos. Con estos datos, basta aplicar la relación de las razones trigonométricas.



2. Según el gráfico, halla x en función de n, α y θ.

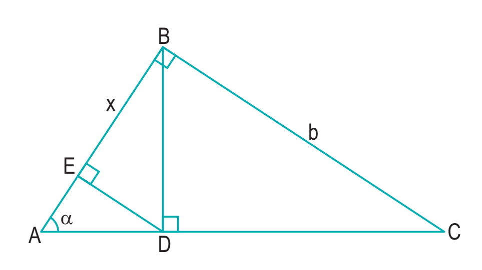


Resolución:

$\triangle$ACD: $AC = AD\text{sen}\theta$
$AC = n\text{sen}\theta$

$\triangle$ABC: $BC = AC\text{sen}\alpha$
$\therefore x = n\text{sen}\theta\text{sen}\alpha$

3. Del gráfico, calcula x en términos de b y α.



Resolución:

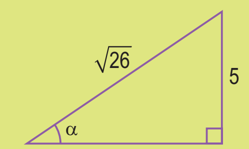
$\triangle$BDC: $m\angle DBC = m\angle EAD = \alpha$
$BD = BC\cos\alpha$
$BD = b\cos\alpha$

$\triangle$BED: $m\angle BDE = m\angle EAD = \alpha$
$EB = BD\text{sen}\alpha$
$\therefore x = b\cos\alpha\text{sen}\alpha$

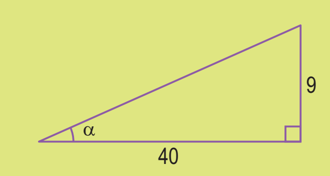
EFECTUAR



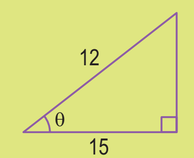
1. Del gráfico, calcula $\tan\alpha$.



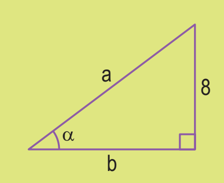
2. Del gráfico, calcula $\text{sen}\alpha$.



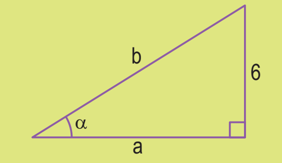
3. Calcula $\text{sen}\theta$.



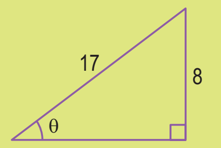
4. En el gráfico, calcula: $a^2 + b$, si $\tan\alpha = 4$.



5. De la figura, calcula: $a + b^2$, si $\tan\alpha = \frac{2}{3}$.

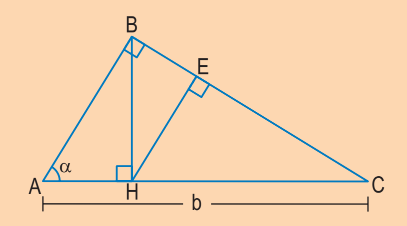


6. Del gráfico, calcula: $\text{sen}\theta + \cos\theta$

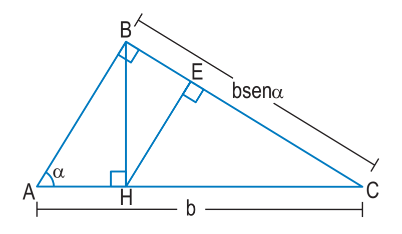


Problemas resueltos

1 Halla HE, en función de b y α.



Resolución:



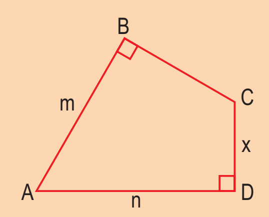
En el ◺AHB: $BH = (b\cos\alpha)\text{sen}\alpha = b\text{sen}\alpha\cos\alpha$

En el ◺HEB: $HE = BH\text{sen}\alpha$

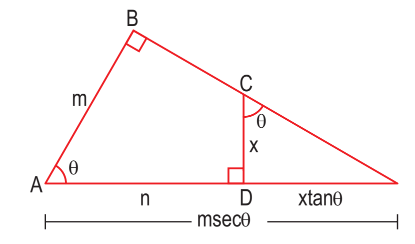
$\Rightarrow HE = (b\text{sen}\alpha\cos\alpha)\text{sen}\alpha$

$\therefore HE = b\text{sen}^2\alpha\cos\alpha$

2 Del gráfico, halla x.



Resolución:



Del gráfico se tiene:

$n + x\tan\theta = m\sec\theta$

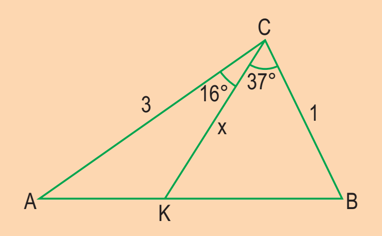
$x\tan\theta = m\sec\theta - n$

Multiplicando a todo por $\cot\theta$:

$x = m\sec\theta\cot\theta - n\cot\theta$

$\therefore x = m\csc\theta - n\cot\theta$

3 De la figura, calcula x.



Resolución:

Sabemos:

$A_{\triangle ACK} + A_{\triangle KCB} = A_{\triangle ACB}$

$$\frac{3x}{2}\text{sen}16° + \frac{x(1)}{2}\text{sen}37° = \frac{3(1)}{2}\text{sen}53°$$

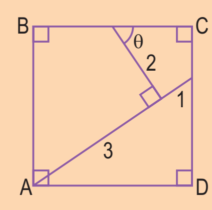
$$\frac{3x}{2}\left(\frac{7}{25}\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{18x}{25} = \frac{6}{5}$$

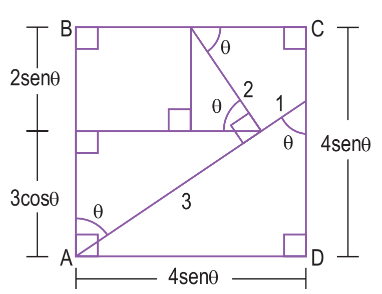
$$\therefore\ x = \frac{5}{3}$$

4 Calcula: $\tan\theta + \cot\theta$

Si ABCD es un cuadrado.



Resolución:



De la figura tenemos:

$3\cos\theta + 2\text{sen}\theta = 4\text{sen}\theta$

$3\cos\theta = 2\text{sen}\theta$

$\frac{3}{2} = \tan\theta$

$\therefore \tan\theta + \cot\theta = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$



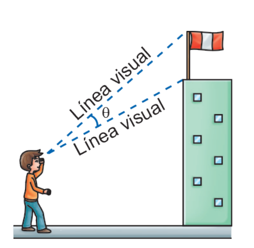
UNIDAD 2

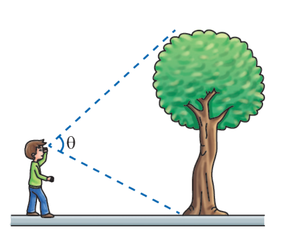


ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

Nota

El ángulo formado por dos líneas visuales se denomina ángulo de observación.





θ: ángulo de observación

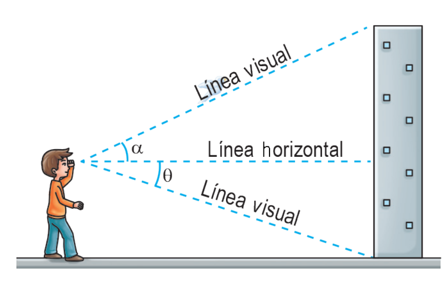
Importante

- De no indicarse la altura del observador y no siendo esta altura la incógnita del problema, entonces se deberá considerar que se está observando desde un punto del suelo.
- En todo problema se recurre a la formación de triángulos rectángulos.



ÁNGULOS VERTICALES

Se denomina ángulos verticales a aquellos contenidos en un plano vertical. Cuando se desea realizar alguna observación, ya sea de objetos o puntos, utilizamos dos términos muy comunes: ángulo de elevación y ángulo de depresión:

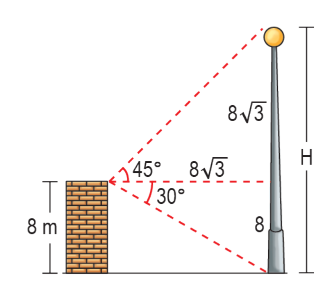


α: ángulo de elevación
θ: ángulo de depresión

Veamos algunos ejemplos:

1. Desde lo alto de un muro de 8 m de altura se observa las partes alta y baja de un poste ubicado al frente, con ángulos de elevación y depresión de 45° y 30°, respectivamente. Halla la altura del poste.

   Resolución:



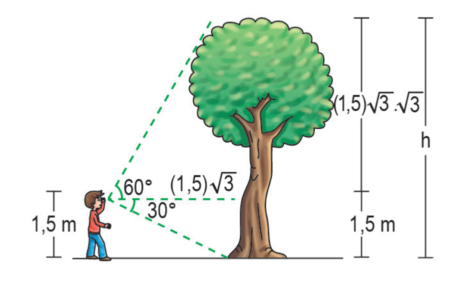
Piden: H

Del gráfico: $H = 8\sqrt{3} + 8$

$H = 8(\sqrt{3} + 1)$ m

2. Una persona de 1,5 m de estatura observa un árbol con un ángulo de depresión de 30° la base, y con un ángulo de elevación de 60°, la parte superior. Calcula la altura del árbol.

   Resolución:



Piden: h

Del gráfico:

$h = (1,5)\sqrt{3}.\sqrt{3} + (1,5)$

$h = (1,5)(3 + 1)$

$h = (1,5)4$

$h = 6$ m

ÁNGULOS HORIZONTALES

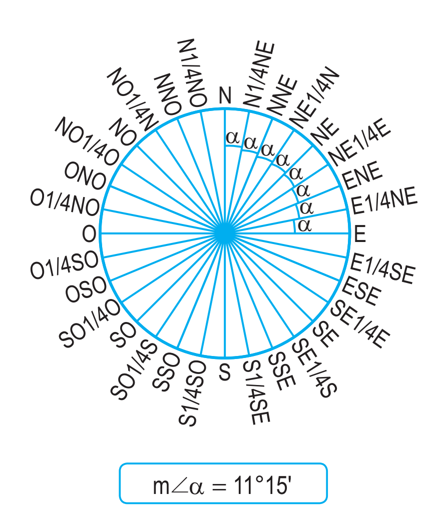
Se llama así a aquellos ángulos contenidos en un plano horizontal.

Rosa Náutica

Es un diagrama ubicado en planos horizontales y diseñados en base a la ubicación de los puntos cardinales que son: Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (O). El punto oeste tambien suele representarse por la letra W.

La rosa Náutica se emplea para localizar la posición de objetos o personas ubicados en el plano horizontal mediante los rumbos y direcciones establecidas en ella.

La rosa Náutica contiene a las 32 direcciones notables de la brújula, las cuales son obtenidas trazando bisectrices a partir de las direcciones principales, siendo el ángulo que forman 2 direcciones notables consecutivas de 11°15'.



$m\angle\alpha = 11°15'$

Se puede notar que la rosa Náutica tiene 32 direcciones, todas distanciadas 11°15'.
La dirección NE es equivalente a escribir N45°E y viceversa, la dirección S1/4SO es equivalente a S11°15'O, la dirección NO1/4O es equivalente a N56°15'O y viceversa.



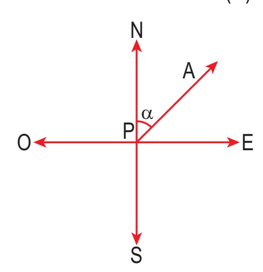
Dirección

Es la línea recta sobre la cual se encuentra la persona u objeto con respecto a una rosa Náutica, quedando determinada dicha dirección por su rumbo.



Rumbo

Es el ángulo agudo horizontal que forma la dirección de la persona u objeto con respecto al eje norte-sur, cuando esta se desvía hacia el este (E) u oeste (O).

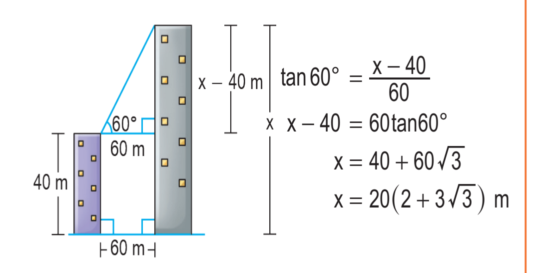


El rumbo de A con respecto a P es α al este del norte. La dirección de A con respecto a P es N α E (norte α este).

Ejercicios de aplicación

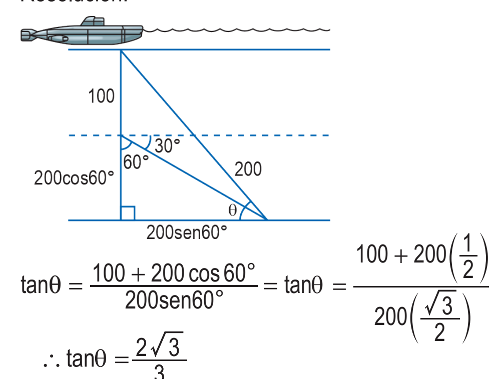
1. La distancia entre dos edificios es de 60 m. Desde la azotea del menor de los edificios, cuya altura es de 40 m, se observa la azotea del otro, con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?

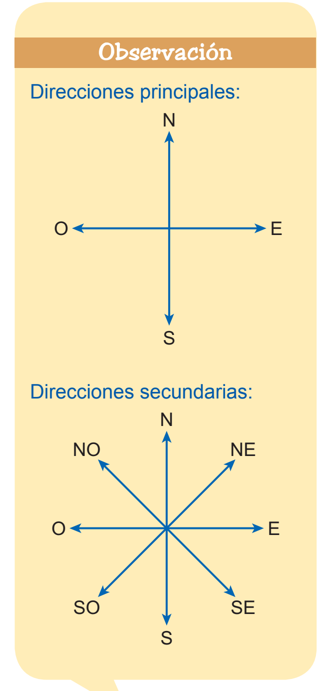
   Resolución:
   Interpretando los datos:



2. Un submarino desciende verticalmente 100 m y luego recorre 200 m en línea recta inclinada 30° respecto al nivel del mar; desde este punto regresa al lugar de partida en línea recta y con un ángulo de elevación θ. Halla tanθ.

   Resolución:







Observación

Es incorrecto indicar la dirección de las siguientes formas:
NE20°, E20°N, O30°S, SO40°, 45°NE, N150°E, S270°O y otros.
Se debe indicar partiendo del N o S hacia el E u O, y el ángulo α debe ser menor que 90°.



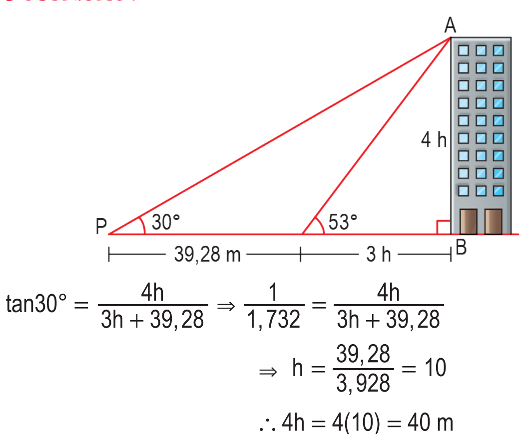
Nota

En todo problema donde incluyen ángulos verticales y horizontales a la vez, se deberá bosquejar diagramas tridimensionales para tener una mejor visión y ubicación del problema.

Problemas resueltos

1 Dos observadores que están en una misma línea con la base de un edificio, observan la parte más alta de este con ángulos de elevación de 30° y 53°. Si los observadores están distanciados 39,28 m, calcula la altura del edificio.
(Considera: $\sqrt{3} = 1{,}732$)

Resolución:



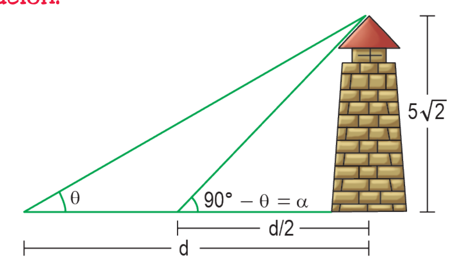
$$\tan 30° = \frac{4h}{3h + 39{,}28} \Rightarrow \frac{1}{1{,}732} = \frac{4h}{3h + 39{,}28}$$

$$\Rightarrow h = \frac{39{,}28}{3{,}928} = 10$$

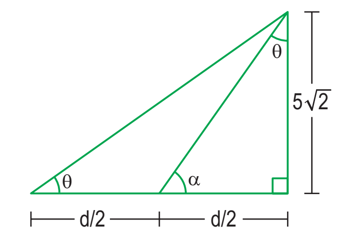
$$\therefore 4h = 4(10) = 40 \text{ m}$$

2 Desde un punto en tierra se divisa la parte alta de una torre con ángulo de elevación θ. Si la distancia de separación se reduce a la mitad, el nuevo ángulo de elevación es el complemento de θ. Halla la distancia inicial de separación, si la altura de la torre es $5\sqrt{2}$ m.

Resolución:



Tenemos:
$\theta + \alpha = 90°$



Utilizando razones trigonométricas tenemos:

$$\tan\theta = \frac{d/2}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{d} \Rightarrow \frac{d}{10\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{d}$$

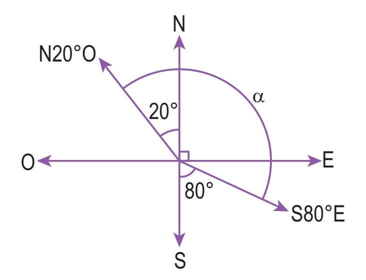
$$d^2 = 50 \times 2$$

$$d^2 = 100 \Rightarrow d = 10 \text{ m}$$

Luego, la distancia inicial de separación es 10 m.

3 ¿Cuál es la medida del menor ángulo formado por las direcciones N20°O y S80°E?

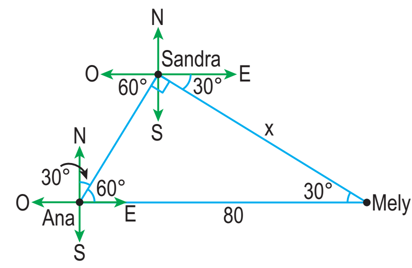
Resolución:



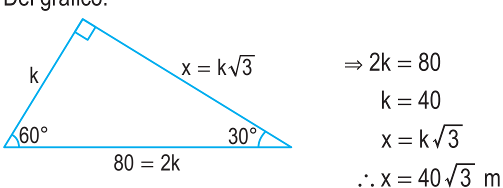
$\Rightarrow$ El menor ángulo que forman estas direcciones es:
$\alpha = 20° + 90° + 10°$
$\therefore \alpha = 120°$

4 Ana divisa a Sandra en la dirección N30°E y a Mely hacia el este a 80 m de distancia. Si Sandra divisa a Mely en la dirección S60°E. ¿Cuál es la distancia entre Sandra y Mely?

Resolución:



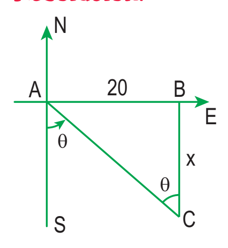
Del gráfico:



$\Rightarrow 2k = 80$
$k = 40$
$x = k\sqrt{3}$
$\therefore x = 40\sqrt{3}$ m

5 Dos ciudades A y B están separadas 20 km, además B se encuentra al este de A, una ciudad C se encuentra al sur de B y a una distancia de 25 km de A. Halla la distancia entre B y C y cuál es el rumbo de C respecto de A.

Resolución:



Del gráfico:

$x = \sqrt{25^2 - 20^2}$

$x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$ km

Además, del triángulo rectángulo se observa:

$$\tan\theta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53°$$

$\therefore$ El rumbo de C respecto de A es: S53°E.



LA RECTA EN EL PLANO CARTESIANO

LA RECTA

Una recta es el conjunto de puntos en el plano cartesiano, que posee una orientación y además tomando dos puntos cualesquiera su pendiente no varía.

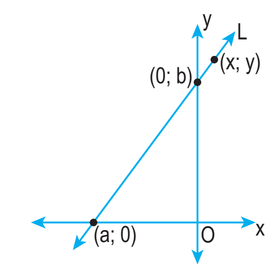
Elementos:

Dada la recta L:

I. Intersección con el eje x: (a; 0)

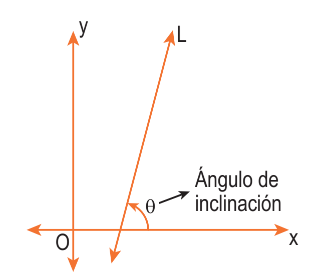
II. Intersección con el eje y: (0; b)

III. Punto de paso: (x; y)



Ángulo de inclinación de una recta

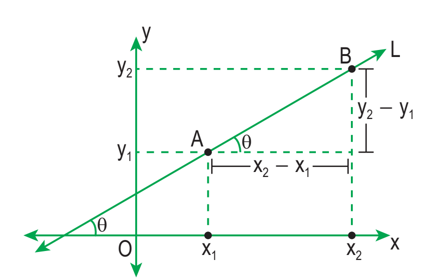
El ángulo de inclinación es aquel ángulo que es formado por una recta con el eje de las abscisas. Se mide desde el eje de las abscisas hasta la recta, en sentido antihorario, y su valor va desde cero grados 0° hasta 180°.



$$0° \leq \theta \leq 180°$$

Pendiente de una recta

Sean $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$, dos puntos cualesquiera de una recta, entonces la pendiente de esa recta se calcula aplicando la siguiente fórmula:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

También podemos definir a la pendiente de una recta como la tangente de su ángulo de inclinación:

$$m = \tan\theta$$

Ejemplo:

El ángulo de inclinación de una recta es 37°, y además pasa por los puntos (4; 3) y (n; 12), calcula el valor de n.

Resolución:

Por dato sabemos que el ángulo de inclinación mide 37°; es decir: $m = \tan 37° \Rightarrow m = 3/4$

Además, conocemos dos puntos de paso de la recta, (4; 3) y (n; 12), luego:

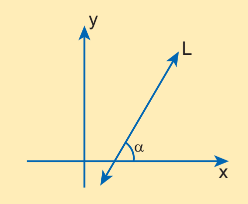
$$m = \frac{12 - 3}{n - 4}$$

Reemplazamos el valor de la pendiente y obtenemos:

$$\frac{3}{4} = \frac{12 - 3}{n - 4} \Rightarrow 3n - 12 = 48 - 12$$
$$3n = 48$$
$$\therefore\ n = 16$$

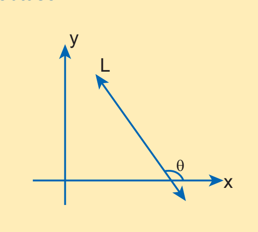
Observación

La pendiente será positiva si el ángulo de inclinación es agudo.



Si: $0° < \alpha < 90° \Rightarrow m > 0$

La pendiente será negativa si el ángulo de inclinación es obtuso.



Si: $90° < \theta < 180° \Rightarrow m < 0$



Posiciones relativas de dos rectas

Atención

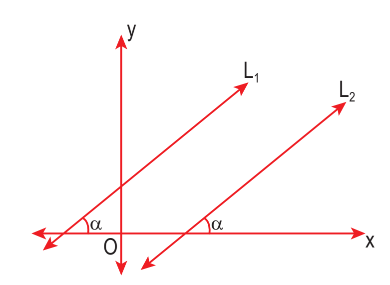
Para cualquier recta perpendicular al eje **x**, incluyendo al eje **y**, ya que su ángulo de inclinación es de 90° y la tangente de este ángulo no está definida, la pendiente no existe.

I. Rectas paralelas

Si dos rectas son paralelas, entonces los valores de sus pendientes son iguales.

Es decir:

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m_1 = m_2$

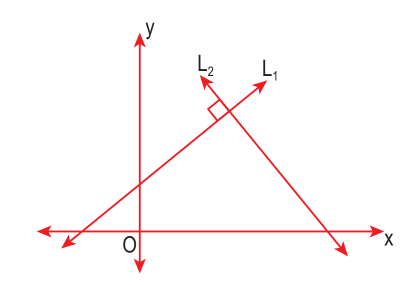


II. Rectas perpendiculares

Si dos rectas son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es igual a –1.

Es decir:

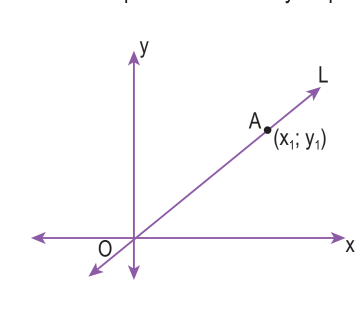
Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$



Ecuación de la recta

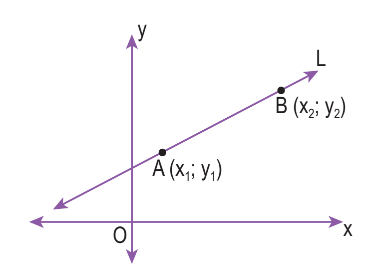
La ecuación de una recta puede ser expresada de diferentes formas, tomando en cuenta su ubicación geométrica o los datos que tengamos de ella.

I. Conociendo un punto de la recta y su pendiente.



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

II. Conociendo dos puntos de la recta.



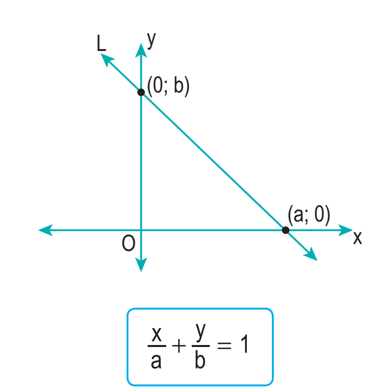
$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Nota

Para toda recta paralela al eje **x** el valor de su pendiente siempre es igual a cero.

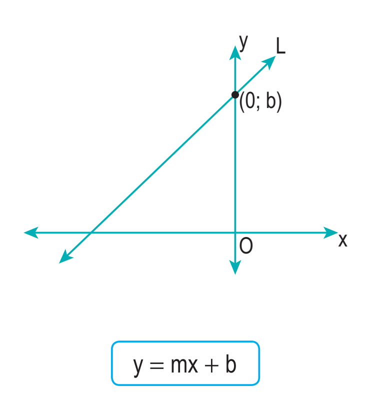
$m = 0$

III. Conociendo los interceptos de la recta con los ejes coordenados.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

IV. Conociendo el intercepto de la recta con el eje de ordenadas y su pendiente (m).



$$y = mx + b$$

Recuerda

La pendiente de cualquier recta es un número real, es decir, puede tomar un valor positivo, cero o negativo.



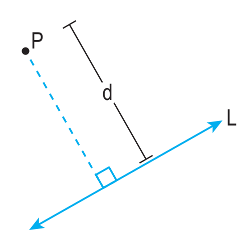
Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta está dada por: $Ax + By + C = 0$

Donde su pendiente es igual a: $m = -\frac{A}{B}$ y $B \neq 0$

Distancia de un punto a una recta

Dada la recta L: $Ax + By + C = 0$ y el punto $P(x_1; y_1)$, la distancia que los separa se calculará así:



$$d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

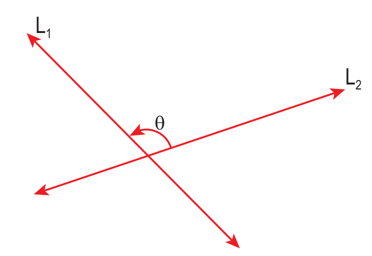
Ejemplo:
Halla la distancia del punto (3; 4) a la recta L: $4x + 3y + 1 = 0$.

Resolución:
Dado el punto (3; 4) y la recta L: $4x + 3y + 1 = 0$, la distancia entre ellos será:

$$d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = \frac{|4(3) + 3(4) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

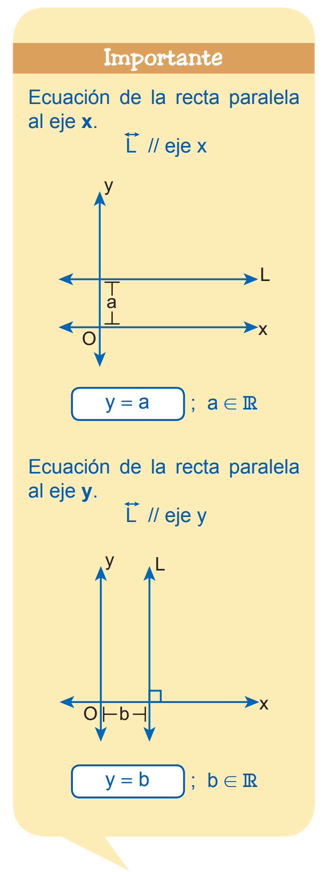
Ángulo entre dos rectas

Cuando dos rectas orientadas se intersecan se forman 4 ángulos, a cada uno de estos ángulos se les llama ángulo entre dos rectas. Al conocer la pendiente de cada uno de las rectas intersecadas, el ángulo formado entre ellas se calcula utilizando la siguiente fórmula:



$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}$$

Donde: m_1 es pendiente de $\overleftrightarrow{L_1}$
m_2 es pendiente de $\overleftrightarrow{L_2}$



Ejercicios de aplicación

1. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos (3; 2) y (2; –1).

   Resolución:
   Recordemos:
   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
   Reemplazamos para los puntos (3; 2) y (2; –1):
   $$m = \frac{2 - (-1)}{3 - 2} = \frac{2 + 1}{3 - 2} = 3$$
   $$\therefore\ m = 3$$

2. Halla la ecuación de la recta, cuyo ángulo de inclinación es 53° y pasa por el punto (2; 3).

   Resolución:
   Pendiente: $m = \tan\alpha = \tan 53° \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

   Ecuación de la recta:
   $y - y_0 = m(x - x_0)$
   $(y - 3) = \frac{4}{3}(x - 2)$
   $3(y - 3) = 4(x - 2)$
   $3y - 9 = 4x - 8 \Rightarrow \overleftrightarrow{L}: 4x - 3y + 1 = 0$

3. Halla la distancia del punto P(2; 3) a la recta L: $-3x + 4y + 4 = 0$.

   Resolución:
   La distancia $d(P;\ \overleftrightarrow{L})$, es:
   $$d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
   $$d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = \frac{|(-3)(2) + (4)(3) + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}}$$
   $$d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = \frac{|-6 + 12 + 4|}{\sqrt{25}} = \frac{|10|}{5}$$
   $\therefore\ d(P;\ \overleftrightarrow{L}) = 2$



Nota

La ecuación de los ejes coordenados es:

Ecuación del eje x:
$y = 0$

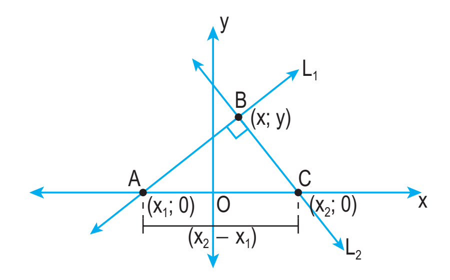
Ecuación del eje y:
$x = 0$

Problemas resueltos

1 Demuestra que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a –1.

Resolución:

Tenemos dos rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ de pendientes m_1 y m_2 respectivamente.



Las pendientes son:

$$m_1 = \frac{y}{x - x_1} \ \wedge \ m_2 = \frac{y}{x - x_2}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{y^2}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

En el triángulo ABC tenemos:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$

$$\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-0)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-x_2)^2+(y-0)^2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2xx_1 - 2xx_2 = -2x_2x_1$$

$$y^2 = -x^2 - x_2x_1 + xx_1 + xx_2$$

$$y^2 = -(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_2x_1)$$

$$y^2 = -(x - x_2)(x - x_1)$$

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x - x_1}\right)}_{m_1}\underbrace{\left(\frac{y}{x - x_2}\right)}_{m_2} = -1$$

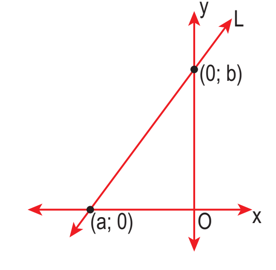
$$\therefore\ m_1 \cdot m_2 = -1$$

2 Halla los interceptos de la recta L: $3x - 2y + 6 = 0$, con los ejes cartesianos.

Resolución:

$\overleftrightarrow{L}: 3x - 2y + 6 = 0$

$$y = \frac{3(x) + 6}{2} \quad \ldots \text{(I)}$$



Intercepto con el eje x: (a; 0); reemplazamos en (I).

$$0 = \frac{3(a) + 6}{2} \Rightarrow 3a + 6 = 0 \quad \therefore\ a = -2$$

Intercepto con el eje y: (0; b); reemplazamos en (I):

$$b = \frac{6}{2} \Rightarrow b = 3$$

Los interceptos son:

Con el eje x: (–2; 0)

Con el eje y: (0; 3)

3 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2; 4) y B(3; –2).

Resolución:

Hallamos la pendiente:

$$m = \frac{(-2) - (4)}{(3) - (2)} = \frac{-2 - 4}{3 - 2} = -6$$

Como A y B pertenecen a la recta, podemos tomar a uno de ellos como punto de paso, entonces:

Sea A(2; 4) el punto de paso y $m = -6$.

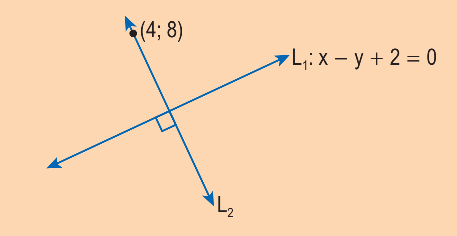
Ecuación de la recta:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$(y - 4) = (-6)(x - 2)$

$y - 4 = -6x + 12 \Rightarrow \overleftrightarrow{L}: 6x + y - 16 = 0$

4 Halla la ecuación de la recta L_2.



Resolución:

Sean las pendientes de las rectas L_1 y L_2, m_1 y m_2, respectivamente.

$\overleftrightarrow{L_1}: x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$

$\Rightarrow m_1 = 1$

Como: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Reemplazando: $(1) \cdot (m_2) \Rightarrow m_2 = -1$

$\overleftrightarrow{L_2}$ tiene un punto de paso: $(x_0; y_0) = (4; 8)$

Ecuación de la recta L_2:

$y - y_0 = m_2(x - x_0)$

$(y - 8) = (-1)(x - 4)$

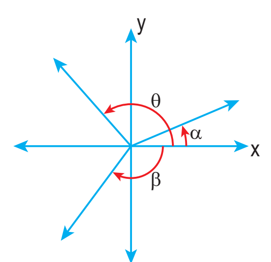
$y - 8 = -x + 4$

$\therefore\ \overleftrightarrow{L_2}: x + y - 12 = 0$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

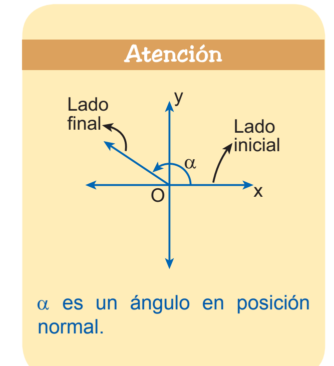
Un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen de un sistema coordenadas y su lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas.
Observa el siguiente gráfico:



$\alpha \in$ IC; $\alpha > 0$
$\theta \in$ IIC; $\theta > 0$
$\beta \in$ IIIC; $\beta < 0$

Del gráfico, α, θ y β son ángulos en posición normal.

Atención



α es un ángulo en posición normal.

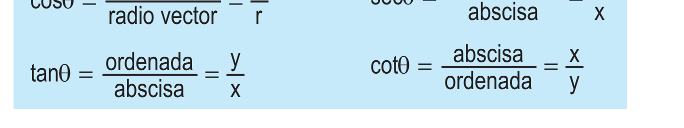


Además, cuando un ángulo está en posición normal el lado final puede estar en alguno de los cuatro cuadrantes, en cambio si está sobre alguno de los ejes coordenados se llamará ángulo cuadrantal.

Razones trigonométricas de ángulos en posición normal

Sea el punto P(x; y) en el lado final del ángulo θ, un ángulo en posición normal, las razones trigonométricas son:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio valor}} = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

Importante

Si el giro del ángulo es en sentido antihorario, el ángulo es positivo y si es en sentido horario, el ángulo es negativo.

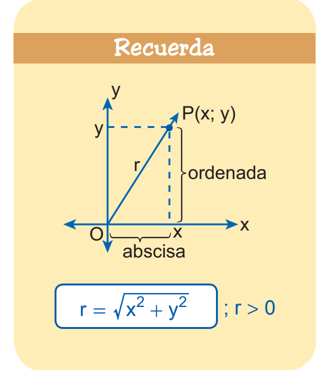
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Las razones trigonométricas de ángulos cuadrantales se detallan en el siguiente recuadro:

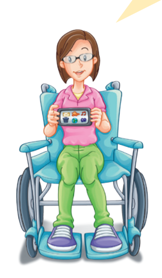
m∠ \ RT	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	ND	1	ND
90°	1	0	ND	0	ND	1
180°	0	–1	0	ND	–1	ND
270°	–1	0	ND	0	ND	–1
360°	0	1	0	ND	1	ND

ND: no definido

Recuerda



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $r > 0$



Ejemplo:

Calcula: $E = \dfrac{\text{sen}\dfrac{\pi}{2} + \cos\pi + \sec 2\pi + \cos\dfrac{3\pi}{2}}{\csc\dfrac{\pi}{2} + \tan\pi}$

Resolución:

Notamos que en E los ángulos están expresados en radianes y cada uno de ellos representan un ángulo cuadrantal, reemplazando sus valores tenemos:

$\text{sen}\pi/2 = 1$ $\quad$ $\cos\pi = -1$ $\quad$ $\sec 2\pi = 1$
$\cos 3\pi/2 = 0$ $\quad$ $\csc\pi/2 = 1$ $\quad$ $\tan\pi = 0$

Reemplazamos estos valores en E:

$$E = \frac{(1) + (-1) + (1) + (0)}{(1) + (0)}$$

$$E = \frac{1}{1} = 1$$

ÁNGULOS COTERMINALES

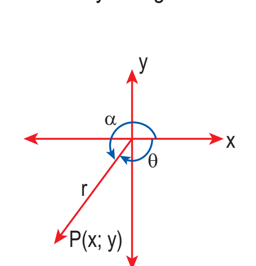
Dos ángulos trigonométricos son coterminales si tienen el mismo lado inicial, lado final y vértice. La única diferencia entre ángulos coterminales es el número de vueltas.

Los ángulos coterminales cumplen las siguientes propiedades:

a) La diferencia de dos ángulos coterminales es un número que se representa por 360°k, k es entero, es decir: sean α y θ dos ángulos coterminales, se cumple:

$$\alpha - \theta = 360°k;\ k \in \mathbb{Z}$$

b) Siendo α y θ ángulos coterminales, y en posición normal, como se muestra en el siguiente gráfico:



$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{sen}\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \cos\theta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \tan\alpha = \tan\theta$$

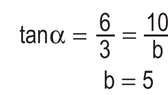
Se cumple de la misma manera para las demás razones trigonométricas.

Ejemplos de aplicación

1. Si los puntos (3; 6) y (b; 10) pertenecen al lado final de un ángulo que se encuentra en posición normal, halla el valor de b.

   Resolución:
   Como ambos puntos pertenecen al lado final del mismo ángulo, sus razones trigonométricas son iguales.

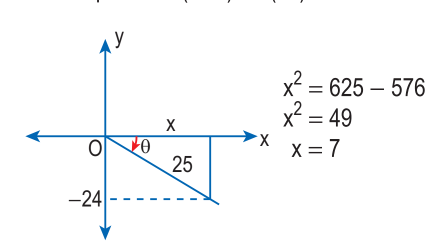
   Si llamamos α al ángulo, entonces:



$$\tan\alpha = \frac{6}{3} = \frac{10}{b}$$
$$b = 5$$

2. Si $\theta \in$ IVC y $\text{sen}\theta = -24/25$.
   Halla el valor de: $M = \csc\theta - \cot\theta$

   Resolución:
   Se cumple: $x^2 + (-24)^2 = (25)^2$

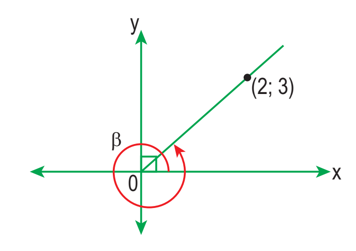


$$x^2 = 625 - 576$$
$$x^2 = 49$$
$$x = 7$$

   Piden: $M = \csc\theta - \cot\theta$

$$M = \frac{r}{y} - \frac{x}{y} \Rightarrow M = \frac{(r-x)}{y} = \frac{(25-7)}{-24} = \frac{18}{-24} = -\frac{3}{4}$$

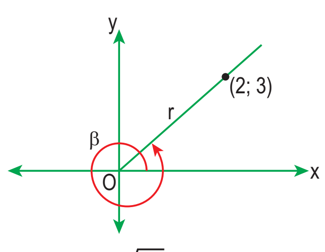
3. Halla $\text{sen}\beta$, de la siguiente figura:



   Resolución:
   β se encuentra en posición normal.

$$x = 2;\ y = 3 \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{(\sqrt{13})}{(\sqrt{13})}$$

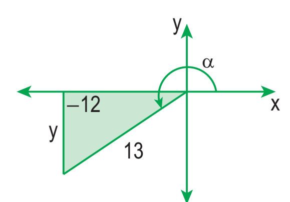


$$\therefore\ \text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

4. Si $\cos\alpha = \frac{-12}{13}$, $\alpha \in$ IIIC, halla:
   $N = \csc\alpha + \cot\alpha$

   Resolución:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}, \text{ entonces: } x = -12,\ r = 13$$



   Se cumple:

$$y = -\sqrt{13^2 - 12^2}$$
$$y = -5$$

   Nos piden:

$$N = -\frac{13}{5} + \frac{12}{5} = -\frac{1}{5}$$

Observación

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos 0° y 360° son equivalentes por ser ángulos coterminales.

Recuerda

Las equivalencias de los ángulos cuadrantales en radianes son:

$\frac{\pi}{2} = 90°$; $180° = \pi$

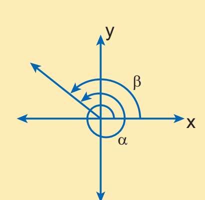
$\frac{3\pi}{2} = 270°$; $2\pi = 360°$ o 0°



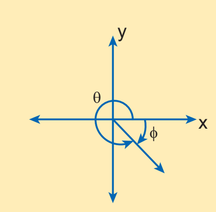
Atención

En los dos casos, ambos ángulos son coterminales.

a)



b)



Problemas resueltos

1 Dos ángulos coterminales están en la relación de 4 a 13. Halla la suma de ambos, si el mayor es el máximo ángulo menor que 800°.

Resolución:

Sean α y β los ángulos ($\alpha > \beta$):

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{13}{4} = k \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = 13k \\ \beta = 4k\end{matrix}$

Como son ángulos coterminales, deducimos:

$\alpha - \beta = 360°n$

$13k - 4k = 360°n$

$9k = 360°n$

$\Rightarrow k = 40°n;\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Respecto al mayor ángulo:

$13k < 800°$

$13(40°n) < 800°$

$520n < 800°$

$n < 1{,}53 \Rightarrow n = 1$

Calculamos la suma:

$\alpha + \beta = 13k + 4k$

$= 17k = 17(40°n)$

$\alpha + \beta = 17(40°)(1)$

$\therefore\ \alpha + \beta = 680°$

2 Indica el signo de las siguientes expresiones:

$M = \frac{\cos 740°\,.\,\tan 1236°}{\text{sen}830°\,.\,\cot 278°} \wedge N = \frac{\tan 1150°\,.\,\cos 570°}{\csc 780°\,.\,\sec 1450°}$

Resolución:

Descomponemos los ángulos, para que nos resulte más fácil determinar a qué cuadrante pertenecen.

$740° = 360°(2) + 20° \Rightarrow 740° \in IC \Rightarrow \cos 740°\ (+)$

$1236° = 360°(3) + 156° \Rightarrow 1236° \in IIC \Rightarrow \tan 1236°\ (-)$

$830° = 360°(2) + 110° \Rightarrow 830° \in IIC \Rightarrow \text{sen}830°\ (+)$

$278° = 360°(0) + 278° \Rightarrow 278° \in IVC \Rightarrow \cot 278°\ (-)$

$1150° = 360°(3) + 70° \Rightarrow 1150° \in IC \Rightarrow \tan 1150°\ (+)$

$570° = 360°(1) + 210° \Rightarrow 570° \in IIIC \Rightarrow \cos 570°\ (-)$

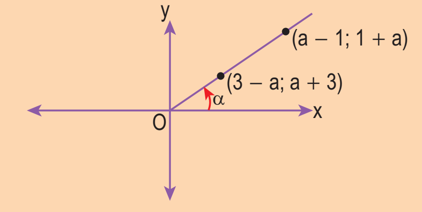
$780° = 360°(2) + 60° \Rightarrow 780° \in IC \Rightarrow \csc 780°\ (+)$

$1450° = 360°(4) + 10° \Rightarrow 1450° \in IC \Rightarrow \sec 1450°\ (+)$

Reemplazamos los valores para M y N:

$M = \frac{(+)(-)}{(+)(-)} = \frac{(-)}{(-)} = (+);\ N = \frac{(+)(-)}{(+)(+)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$

3 Calcula el valor de $T = 2(\tan\alpha - \sqrt{3})$.



Resolución:

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$, del gráfico:

$\tan\alpha = \frac{a+3}{3-a} = \frac{1+a}{a-1}$

$(a+3)(a-1) = (3-a)(1+a) \Rightarrow 6 = 2a^2$

$3 = a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

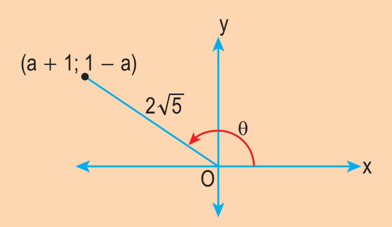
Pero el punto $(a - 1;\ 1 + a) \in IC$, por lo tanto la abscisa y la ordenada deben ser positivas, entonces: $a = \sqrt{3}$.

$\left.\begin{matrix} x = a - 1 = \sqrt{3} - 1 \\ y = 1 + a = 1 + \sqrt{3}\end{matrix}\right\} \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)} = 2 + \sqrt{3}$

Reemplazando en la expresión:

$T = 2(\tan\alpha - \sqrt{3}) = 2((2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}) = 2(2) = 4$

4 Del gráfico, halla: $R = \tan\theta + \cot\theta$



Resolución:

Para calcular el valor de a, aplicamos:

$x^2 + y^2 = r^2$ (radio vector)

$\Rightarrow (a+1)^2 + (1-a)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$(a^2 + 2a + 1) + (1 - 2a + a^2) = 20$

$2a^2 + 2 = 20$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Pero el punto $(a + 1;\ 1 - a) \in IIC$, por lo tanto la abscisa debe ser negativa y la ordenada positiva; para que eso se cumpla: $a = -3$

Luego: $x = a + 1 = (-3) + 1 = -2$

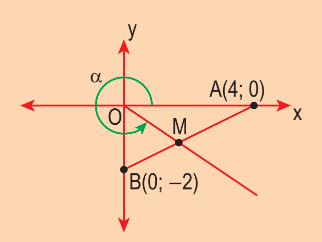
$y = 1 - a = 1 - (-3) = 4$

Nos piden:

$R = \tan\theta + \cot\theta = \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y}\right) = \left(-\frac{4}{2}\right) + \left(-\frac{2}{4}\right)$

$R = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

5 De la figura mostrada, calcula $\tan\alpha$, si $AM = BM$.



Resolución:

M punto medio de extremos A y B.

$M = \left(\frac{4+0}{2};\ \frac{0+(-2)}{2}\right) = (2; -1)$

M pertenece al lado final del ángulo α (α en posición normal).

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$



REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Recuerda

sen csc (+)	Todas positivas
tan cot (+)	cos sec (+)



CASOS

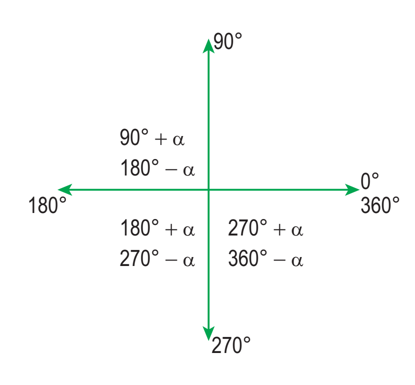
Se presentan los siguientes casos:

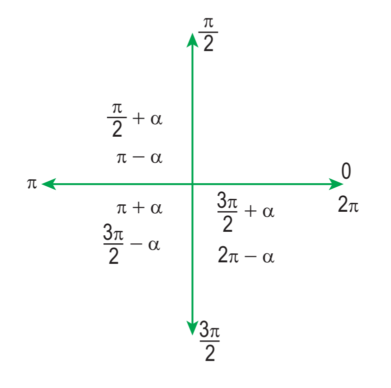
a) Para razones trigonométricas cuyos ángulos sean de la forma: $90° + \alpha$; $180° \pm \alpha$; $270° \pm \alpha$; $360° - \alpha$

$$RT\begin{pmatrix} 180° \pm \alpha \\ 360° - \alpha \end{pmatrix} = \pm RT(\alpha)$$

$$RT\begin{pmatrix} 90° + \alpha \\ 270° \pm \alpha \end{pmatrix} = \pm (CO\ RT(\alpha))$$

Para determinar el signo (+) o (–) del segundo miembro se asume que α sea agudo, con el fin de determinar el cuadrante del ángulo del primer miembro y así establecer el signo que le corresponde a la razón trigonométrica de dicho ángulo.





Nota

Tenga en cuenta que al reducir un ángulo al primer cuadrante no siempre el ángulo agudo, final es notable.

Ejemplo:

$\sec 100° = \sec(90° + 10°)$
$= -\csc 10°$

$\cot 250° = \cot(270° - 20°)$
$= \tan 20°$

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante.

1. $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$
2. $\tan(360° - \alpha) = \tan\alpha$
3. $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
4. $\sec(360° - \alpha) = \sec\alpha$
5. $\text{sen}(90° + \alpha) = \cos\alpha$
6. $\sec(270° + \alpha) = \csc\alpha$
7. $\cos(90° + \alpha) = -\text{sen}\alpha$
8. $\cot(270° - \alpha) = \tan\alpha$

b) Para razones trigonométricas cuyo ángulo es de la forma $360° n + \alpha$ / $n \in \mathbb{Z}$

$$RT(360°.n + \alpha) = RT(\alpha)$$

Ejemplos:
Reduce al primer cuadrante.

1. $\cos 755° = \cos(360° \times 2 + 35°)$
$= \cos 35°$

2. $\csc 3965° = \csc(360° \times 11 + 5°)$
$= \csc 5°$

3. $\tan 1172° = \tan(360° \times 3 + 92°) = \tan 92°$
$= \tan(90° + 2°) = -\cot 2°$

4. $\sec 5600° = \sec(360° \times 15 + 200°) = \sec 200°$
$= \sec(180° + 20°) = \sec 20°$



Observación

Si al efectuar una reducción, todavía no se llega al primer cuadrante, entonces se prosigue como en el primer caso.

Ejemplo:

$\csc 1020° = \csc(2 \times 360° + 300°)$
$= \csc 300°$
$= \csc(270° + 30°)$
$= -\sec 30°$
$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) Para razones trigonométricas de ángulos negativos

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

Ejemplos:
Calcula el valor de las siguientes RT:

1. $\tan(-53°/2) = -\tan(53°/2)$
$= -\frac{1}{2}$

2. $\sec(-37°/2) = (\sec 37°/2)$
$= \frac{\sqrt{10}}{3}$

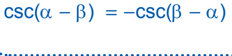
3. $\text{sen}(-1185°) = -\text{sen}1185°$
$= -\text{sen}(360° \times 3 + 105°)$
$= -\text{sen}105°$
$= -\text{sen}(90° + 15°)$
$= -\cos 15°$
$= -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

4. $\cot(-1784°) = -\cot 1784°$
$= -\cot(360° \times 4 + 344°)$
$= -\cot 344°$
$= -\cot(360° - 16°)$
$= -(-\cot 16°)$
$= \frac{24}{7}$

Nota

Propiedades adicionales:

$\text{sen}(\alpha - \beta) = -\text{sen}(\beta - \alpha)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$
$\tan(\alpha - \beta) = -\tan(\beta - \alpha)$
$\cot(\alpha - \beta) = -\cot(\beta - \alpha)$
$\sec(\alpha - \beta) = \sec(\beta - \alpha)$
$\csc(\alpha - \beta) = -\csc(\beta - \alpha)$



Propiedades

1. Si: $\alpha + \beta = 180°$

Se cumple:

$\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$; $\cos\alpha = -\cos\beta$; $\tan\alpha = -\tan\beta$

Demostración:

$$\alpha = 180° - \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\overbrace{(180° - \beta)}^{\in \text{IIC}}$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta$$

Ejemplos:
$\text{sen}37° = \text{sen}143°$
$\cos 45° = -\cos 135°$
$\tan 60° = -\tan 120°$



2. Si: $\alpha + \beta = 360°$

Se cumple:

$\text{sen}\alpha = -\text{sen}\beta$; $\cos\alpha = \cos\beta$; $\tan\alpha = -\tan\beta$

Demostración:

$$\alpha = 360° - \beta \Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{sen}\overbrace{(360° - \beta)}^{\in \text{IVC}}$$
$$\text{sen}\alpha = -\text{sen}\beta$$

Ejemplos:
$\text{sen}315° = -\text{sen}45°$
$\cos 300° = \cos 60°$
$\tan 307° = -\tan 53°$

Recuerda

Para determinar el signo (+) o (–) del segundo miembro, debemos analizar en qué cuadrante cae el ángulo que se va a reducir.



Ejemplos de aplicación

1. En un triángulo ABC, reduce:

$$T = \frac{\cos(2A + 2B)}{\cos 2C} + \frac{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\cot\frac{B}{2}}$$

Resolución:
Dato:
$A + B + C = 180°$
$2A + 2B + 2C = 360° \;\wedge\; \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$
$2A + 2B = 360° - 2C \;\wedge\; \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{B}{2}$

Reemplazando:

$$T = \frac{\cos(360° - 2C)}{\cos 2C} + \frac{\tan\left(90° - \frac{B}{2}\right)}{\cot\frac{B}{2}}$$

$$T = \frac{\cos 2C}{\cos 2C} + \frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{B}{2}} = 1 + 1 = 2$$

2. Calcula P:

$$P = \tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} - \tan\frac{7\pi}{12} - \tan\frac{11\pi}{12}$$

Resolución:
Realizamos reducción del primer cuadrante:

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\tan\frac{5\pi}{12}$$

$$\tan\frac{11\pi}{12} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}$$

Reemplazamos:

$$P = \tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} - \left(-\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\tan\frac{\pi}{12}\right)$$

$$P = \tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12} + \tan\frac{\pi}{12}$$

$$P = 2\left[\tan\frac{\pi}{12} + \tan\frac{5\pi}{12}\right]$$

Pero: $\tan\frac{\pi}{12} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

Luego:
$P = 2[2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}]$
$P = 8$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$A = \text{sen}810°\cos1200°\tan1215°$

Resolución:

$A = \text{sen}(2 \times 360° + 90°)\cos(3 \times 360° + 120°)\tan(360° \times 3 + 135°)$

$A = \text{sen}90°\cos120°\tan135°$

$A = \text{sen}90°\cos(180° - 60°)\tan(180° - 45°)$

$A = 1\,(-\cos60°)(-\tan45°)$

$A = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

2 Calcula:

$E = \cos^3 10° + \cos^3 55° + \cos^3 170° + \cos^3 125°$

Resolución:

$E = \cos^3 10° + \cos^3 55° + \cos^3(180° - 10°) + \cos^3(180° - 55°)$

$E = \cos^3 10° + \cos^3 55° + (-\cos10°)^3 + (-\cos55°)^3$

$E = \cos^3 10° + \cos^3 55° - \cos^3 10° - \cos^3 55°$

$E = 0$

3 Simplifica:

$E = \dfrac{\text{sen}100° + \cos350°}{-\text{sen}170° - \cos280°}$

Resolución:

$E = \dfrac{\text{sen}(90° + 10°) + \cos(360° - 10°)}{-\text{sen}(180° - 10°) - \cos(270° + 10°)}$

$E = \dfrac{\cos10° + \cos10°}{-\text{sen}10° - \text{sen}10°}$

$E = \dfrac{2\cos10°}{-2\text{sen}10°} \quad \Rightarrow E = -\cot10°$

4 Si $\tan25° = a$, calcula:

$M = \dfrac{\tan155° - \tan115°}{\tan155° + \tan115°}$

Resolución:

$M = \dfrac{\tan(180° - 25°) - \tan(90° + 25°)}{\tan(180° - 25°) + \tan(90° + 25°)}$

$M = \dfrac{-\tan25° + \cot25°}{-\tan25° - \cot25°}$

Reemplazando: $\tan25° = a \wedge \cot25° = \dfrac{1}{a}$

$M = \dfrac{-a + \frac{1}{a}}{-a - \frac{1}{a}} = \dfrac{\frac{-a^2 + 1}{a}}{\frac{-a^2 - 1}{a}} = \dfrac{-a^2 - 1}{-(a^2 + 1)}$

$M = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

5 Siendo α y β complementarios, simplifica:

$E = \dfrac{\text{sen}(\alpha + 2\beta)\tan(2\alpha + 3\beta)}{\cos(2\alpha + \beta)\tan(4\alpha + 3\beta)}$

Resolución:

Dato: $\alpha + \beta = 90°$

Entonces:

$E = \dfrac{\text{sen}(90° + \beta)\tan(180° + \beta)}{\cos(90° + \alpha)\tan(270° + \alpha)}$

$E = \dfrac{(+\cos\beta)(+\tan\beta)}{(-\text{sen}\alpha)(-\cot\alpha)} = \dfrac{\cos\beta\left(\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}\right)}{\text{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)}$

$E = \dfrac{\text{sen}\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{sen}(90° - \alpha)}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}$

$E = 1$

6 Si $a + b = 90°$, calcula el valor de:

$E = \dfrac{3\text{sen}(2a + b) + 4\cos a}{4\cos(2b + a) + 3\text{sen}b}$

Resolución:

$E = \dfrac{3\text{sen}(90° + a) + 4\cos a}{4\cos(90° + b) + 3\text{sen}b}$

$E = \dfrac{3\cos a + 4\cos a}{-4\text{sen}b + 3\text{sen}b} = \dfrac{7\cos a}{-\text{sen}b}$

$E = \dfrac{7\cos(90° - b)}{-\text{sen}b} = \dfrac{7\text{sen}b}{-\text{sen}b}$

$E = -7$

7 Simplifica:

$A = \tan\dfrac{2\pi}{13} + \tan\dfrac{5\pi}{13} + \tan\dfrac{8\pi}{13} + \tan\dfrac{11\pi}{13}$

Resolución:

$A = \tan\dfrac{2\pi}{13} + \tan\dfrac{5\pi}{13} + \tan\dfrac{8\pi}{13} + \tan\dfrac{11\pi}{13}$

Propiedad: si $\alpha + \beta = \pi$ rad $\Rightarrow \tan\alpha = -\tan\beta$

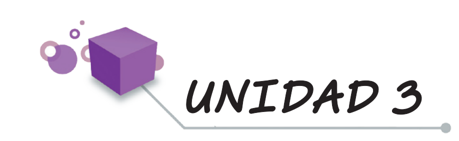
$\dfrac{2\pi}{13} + \dfrac{11\pi}{13} = \pi \Rightarrow \tan\dfrac{2\pi}{13} = -\tan\dfrac{11\pi}{13}$

$\dfrac{5\pi}{13} + \dfrac{8\pi}{13} = \pi \Rightarrow \tan\dfrac{5\pi}{13} = -\tan\dfrac{8\pi}{13}$

Reemplazando:

$A = \tan\dfrac{2\pi}{13} + \tan\dfrac{5\pi}{13} - \tan\dfrac{5\pi}{13} - \tan\dfrac{2\pi}{13}$

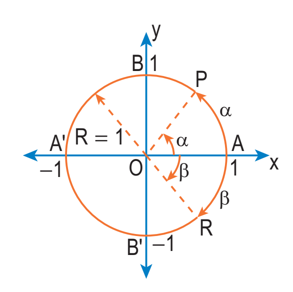
$A = 0$



CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

DEFINICIÓN

Es aquella circunferencia canónica, cuyo radio tiene como longitud a la unidad. Observemos el siguiente gráfico y sus elementos.



O(0; 0): origen de coordenadas.
A(1; 0): origen de arcos.
B(0; 1): origen de complementos de arcos.
A'(1; 0): origen de suplementos de arcos.

α: arco positivo (sentido horario).
β: arco negativo (sentido antihorario).

Del gráfico el punto P y R son los extremos de arcos, a su vez estos arcos se encuentran en posición normal.

Importante

A la circunferencia trigonométrica, también se le conoce como circunferencia unitaria ya que su radio es igual a 1; es decir:

$x^2 + y^2 = 1$

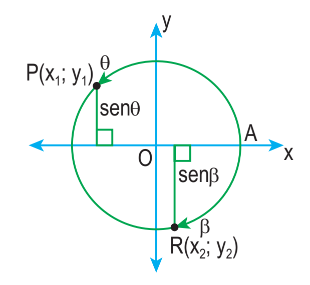


LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Como sabemos, la circunferencia trigonométrica tiene de radio a la unidad, las razones trigonométricas se representarán mediante segmentos de recta que se les denominará líneas trigonométricas.

Línea trigonométrica seno

El seno de un arco en la CT se representa mediante la ordenada del punto que está en el extremo del arco.



Del gráfico:

$\text{sen}\theta = y_1 \;\wedge\; \text{sen}\beta = y_2$

Variación:

$-1 \leq \text{senx} \leq 1; \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Halla la variación de la expresión: $P = 3\text{senx} + 1$

Resolución:
Sabemos que para el seno se cumple:

$-1 \leq \text{senx} \leq 1; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Multiplicamos a esa expresión por 3:

$-3 \leq 3\text{senx} \leq 3$

Le sumamos 1:

$-3 + 1 \leq 3\text{senx} + 1 \leq 3 + 1$

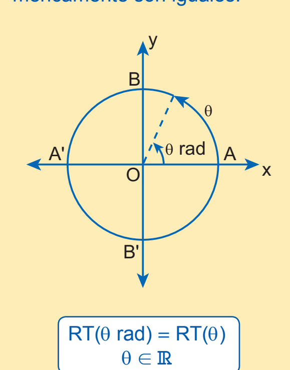
$-2 \leq 3\text{senx} + 1 \leq 4$

$-2 \leq P \leq 4$

Luego, tenemos: $P \in [-2; 4]$

Observación

En toda CT se cumple que el arco y el ángulo central correspondiente, se cumple que numéricamente son iguales.

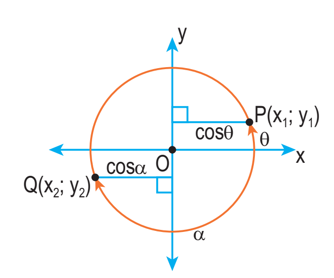


$\text{RT}(\theta \text{ rad}) = \text{RT}(\theta)$
$\theta \in \mathbb{R}$



Línea trigonométrica coseno

El coseno de un arco en la CT se representa mediante la abscisa del punto que está en el extremo del arco.



Entonces:

$\cos\theta = x_1 \;\wedge\; \cos\alpha = x_2$

Variación:

$-1 \leq \cos x \leq 1; \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Nota

Variación analítica del seno.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función seno	(+)	(+)	(–)	(–)

Nota

Variación analítica del coseno.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función coseno	(+)	(–)	(–)	(+)

Ejemplo:

Halla el máximo valor de:

$$k = \frac{1}{3}\cos x + 1$$

Resolución:

Por teoría sabemos que: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Dividimos entre 3: $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}\cos x \leq \frac{1}{3}$

Sumamos 1: $-\frac{1}{3} + 1 \leq \frac{1}{3}\cos x + 1 \leq \frac{1}{3} + 1$

$$\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}$$

Por último tenemos: $k \in [2/3 ; 4/3]$

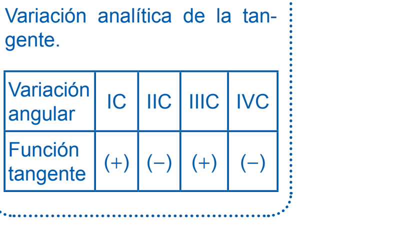
Nota

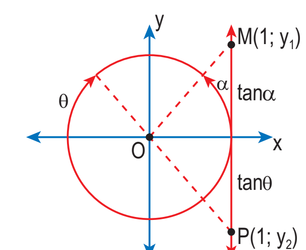
Variación analítica de la tangente.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función tangente	(+)	(–)	(+)	(–)

Línea trigonométrica tangente

La tangente de un arco en la CT es la ordenada del punto de intersección, entre el eje de la tangente y la prolongación del radio que contiene el extremo del arco.





Entonces:

$\tan\alpha = y_1 \wedge \tan\theta = y_2$

Variación:

$-\infty < \tan x < +\infty;\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$

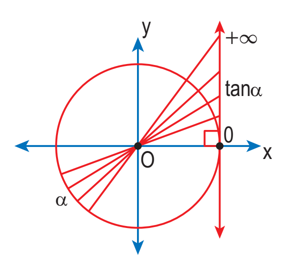
Ejemplo:

Determina la variación de:

$M = 2\tan\alpha - 3;\quad$ si $\alpha \in$ IIIC

Resolución:

Por dato sabemos que $\alpha \in$ IIIC, analizamos el siguiente gráfico:



Entonces:

$0 < \tan\alpha < +\infty$
$0 < 2\tan\alpha < +\infty$
$-3 < 2\tan\alpha - 3 < +\infty$
$-3 < M < +\infty$

Por lo tanto, la variación de M será:

$M \in \langle -3; +\infty \rangle$

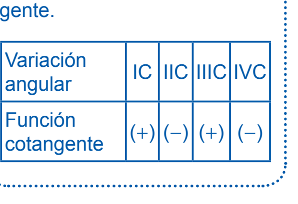
Nota

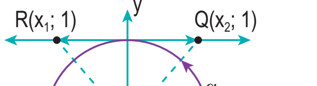
Variación analítica de tu cotangente.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función cotangente	(+)	(–)	(+)	(–)

Línea trigonométrica cotangente

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio o diámetro que pasa por el extremo del arco.





Entonces:

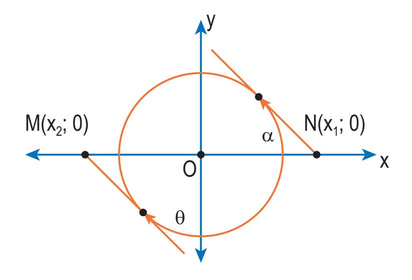
$\cot\alpha = x_2 \wedge \cot\theta = x_1$

Variación:

$-\infty < \cot x < +\infty;\ \forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$

Línea trigonométrica secante

La secante de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje x.



Entonces:

$\sec\alpha = x_1 \wedge \sec\theta = x_2$

Variación:

$1 \leq \sec x \vee \sec x \leq -1$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

Nota

Variación analítica de la secante.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función secante	(+)	(–)	(–)	(+)

Ejemplo:

Halla la extensión de: $B = 3\sec^2 x + 5$

Resolución:

Sabemos que la variación de la secante es:

$\sec x \leq -1 \vee \sec x \geq 1$

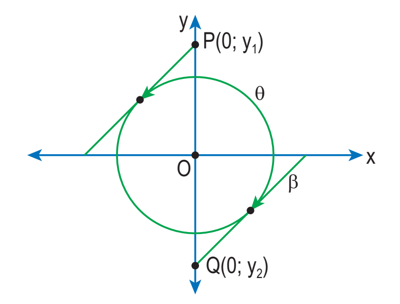
Elevamos al cuadrado y multiplicamos por 3:

$$\sec^2 x \geq 1$$
$$3\sec^2 x \geq 3$$
$$3\sec^2 x + 5 \geq 3 + 5$$
$$3\sec^2 x + 5 \geq 8$$
$$B \geq 8$$

Luego, la extensión de B es: $[8; +\infty\rangle$

Línea trigonométrica cosecante

La cosecante de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje y.



Entonces:

$\csc\theta = y_1 \wedge \csc\beta = y_2$

Variación:

$1 \leq \csc x \vee \csc x \leq -1$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

Nota

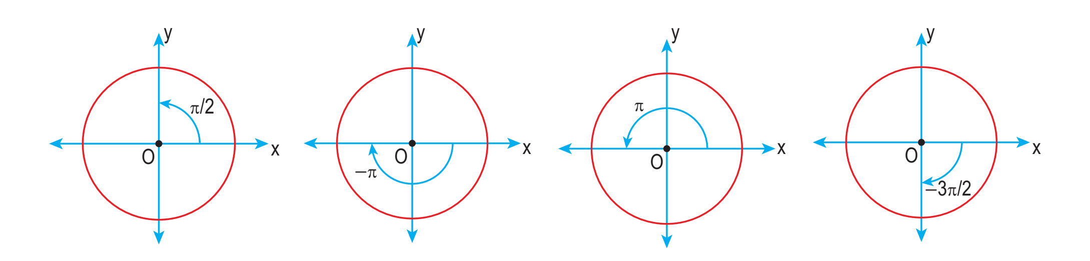
Variación analítica de la cosecante.

Variación angular	IC	IIC	IIIC	IVC
Función cosecante	(+)	(+)	(–)	(–)

ARCO CUADRANTAL

Los arcos cuadrantales son aquellos arcos dirigidos en posición normal, cuyo extremo coincide con algunos de los puntos de intersección de los ejes con la CT.

Ejemplos:

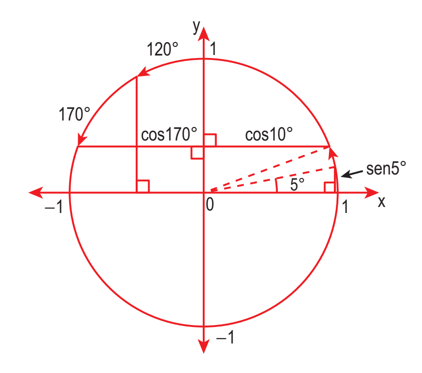


Problemas resueltos

1 Ordena de menor a mayor; utilizando la circunferencia trigonométrica.
sen5°; cos10°; sen120°; cos170°

Resolución:

Graficamos los ángulos y las razones trigonométricas en la CT:



Del gráfico, tenemos:
cos10° > sen120° > sen5°
cos170° < 0
Luego ordenamos: cos10° > sen120° > sen5° > cos170°

2 Halla la variación de k, si:

$$k = \frac{2 - 3\text{sen}\theta}{2}$$

Resolución:

Sabemos: $-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$
Formamos la expresión k:

Multiplicamos por 3: $-1 \times 3 \leq (\text{sen}\theta) \times 3 \leq 1 \times 3$
$-3 \leq 3\text{sen}\theta \leq 3$

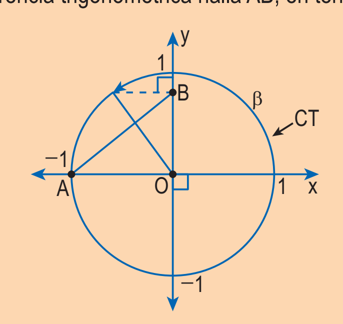
Multiplicamos por (–1): $-3 \times (-1) \geq (3\text{sen}\theta) \times (-1) \geq (3) \times (-1)$
↑ ↑
Cambia el sentido

Sumamos 2: $3 \geq -3\,\text{sen}\theta \geq -3$
$5 \geq 2 - 3\,\text{sen}\theta \geq -1$

Dividimos entre 2: $\frac{5}{2} \geq \frac{2 - 3\text{sen}\theta}{2} \geq -1/2$

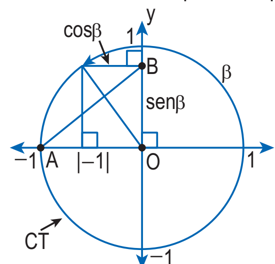
Al final tenemos: $5/2 \geq k \geq -1/2$
$\therefore\ k \in [-1/2; 5/2]$

3 En la circunferencia trigonométrica halla AB, en términos de β.



Resolución:

Usaremos valores positivos por tratarse de distancias.



En el triángulo rectángulo AOB:

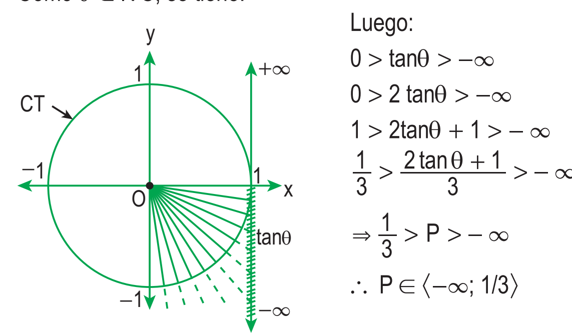
$(AB)^2 = (|-1|)^2 + (\text{sen}\beta)^2$

$\therefore\ AB = \sqrt{1 + \text{sen}^2\beta}$

4 Si $\theta \in$ IVC, determina la variación de P, en: $\tan\theta = \frac{3P - 1}{2}$

Resolución:

Como $\theta \in$ IVC, se tiene:



Luego:

$0 > \tan\theta > -\infty$

$0 > 2\tan\theta > -\infty$

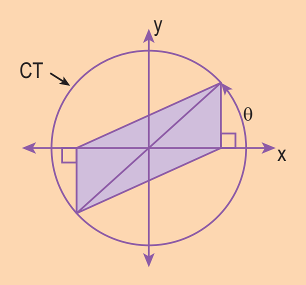
$1 > 2\tan\theta + 1 > -\infty$

$\frac{1}{3} > \frac{2\tan\theta + 1}{3} > -\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{3} > P > -\infty$

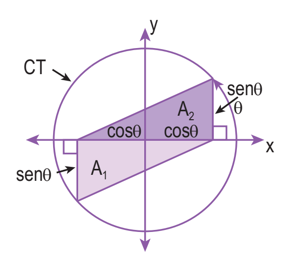
$\therefore\ P \in \langle -\infty; 1/3 \rangle$

5 En la CT mostrada, calcula el área sombreada.



Resolución:

Para hallar el área sombreada la dividimos en dos triángulos rectángulos:



$A_{Total} = A_1 + A_2$

$A_T = \frac{\text{sen}\theta(2\cos\theta)}{2} + \frac{\text{sen}\theta(2\cos\theta)}{2}$

$A_T = \text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}\theta\cos\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

$A_T = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN

Son igualdades entre razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor de la variable angular en cuya razón trigonométrica que interviene se encuentra definida.

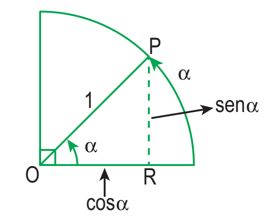
IDENTIDADES FUNDAMENTALES

A continuación analizaremos las 8 identidades trigonométricas fundamentales divididas en tres grupos: identidades recíprocas, por división y pitagóricas.

Identidades recíprocas

$\csc\alpha \operatorname{sen}\alpha = 1$ ... (I) $\qquad$ $\sec\alpha\cos\alpha = 1$ ... (II) $\qquad$ $\tan\alpha\cot\alpha = 1$ ... (III)

Demostración:
Para demostrar la identidad recíproca (I) tomaremos como referencia el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica.



Por definición de razón trigonométrica:

$$\csc\alpha = \frac{OP}{PR} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \csc\alpha \operatorname{sen}\alpha = 1$$

Además tenemos que analizar el cociente y los valores admisibles para α.

Es decir: $\operatorname{sen}\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto:

$\csc\alpha \operatorname{sen}\alpha = 1$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$

Analizamos la identidad recíproca (II); del gráfico anterior y por definición de la razón trigonométrica tenemos:

$$\sec\alpha = \frac{OP}{OR} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha\cos\alpha = 1$$

Analizando el cociente:

$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto:

$\sec\alpha\cos\alpha = 1$; $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por último analizaremos la identidad (III); nuevamente observaremos el gráfico anterior y por definición tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{PR}{OR} \wedge \cot\alpha = \frac{OR}{PR} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot\alpha\tan\alpha = 1$$

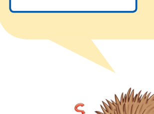
Importante

Estas identidades se desprenden de las identidades recíprocas:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ $\qquad$ $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

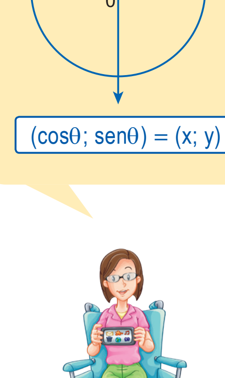
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$



Observación

Debes tener en cuenta que:



$(\cos\theta; \operatorname{sen}\theta) = (x; y)$

Luego:

$\tan\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq n\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Luego:

$\boxed{\cot\alpha\tan\alpha = 1}$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - (\frac{n\pi}{2})$; $n \in \mathbb{Z}$

Identidades por cociente

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}$$

Demostración:

Tomando en cuenta que: $(x; y) = (\cos\alpha; \text{sen}\alpha)$ tenemos: $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Luego: $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto: $\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por lo anterior tenemos: $\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

Luego: $\text{sen}\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto: $\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}}$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - (n\pi)$; $n \in \mathbb{Z}$

Importante

De las identidades pitagóricas tenemos también las siguientes identidades:

$\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

$\sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha$

$\csc^2\alpha - 1 = \cot^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$



Identidades pitagóricas

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad \boxed{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha} \qquad \boxed{\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha}$$

Demostración:

Tomando en cuenta el gráfico anteriormente mostrado tenemos:

$$PR^2 + OR^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

De la identidad anterior, la dividimos entre $\cos^2\alpha$:

$$\left(\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

En este caso la restricción será para $\cos^2\alpha$: $\cos^2\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por último dividimos a esa misma identidad entre $\text{sen}^2\alpha$:

$$\left(\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}\right) \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

La restricción sería, por este caso para $\text{sen}^2\alpha$: $\text{sen}^2\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$; $\forall\ \alpha \neq \mathbb{R} - (n\pi)$; $n \in \mathbb{Z}$



Observación

De la identidad pitagórica:

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
$= (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$
$= (1 - \text{sen}\alpha)(1 + \text{sen}\alpha)$

En los siguientes ejemplos mostramos las diferentes aplicaciones de las identidades.

1. Simplifica: $E = \frac{\text{sen}\alpha\tan\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha\cot\alpha + \text{sen}\alpha}$

Resolución:
Siempre es conveniente usar las expresiones en función a senos y cosenos.

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) + \cos\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right) + \text{sen}\alpha} = \frac{\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha} + \text{sen}\alpha} = \frac{\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha}}$$

$$E = \frac{\text{sen}\alpha\,(\overbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}^{\text{Identidad pitagórica}})}{\cos\alpha\,(\underbrace{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}_{\text{Identidad pitagórica}})} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

↳ Identidad por cociente

2. Demuestra: $\frac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} - 1 = \sec^2\alpha$

Resolución:
Para demostrar esta igualdad, trabajaremos reduciendo el miembro de la izquierda.

$$\frac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} - 1 = \frac{\overbrace{(\sec^2\alpha - 1)}^{\text{Identidad pitagórica}}\ (\sec^2\alpha + 1)}{\tan^2\alpha} - 1$$

$$\frac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} - 1 = \frac{(\tan^2\alpha)(\sec^2\alpha + 1)}{\tan^2\alpha} - 1$$

Simplificando $\tan^2\alpha$, tanto en el denominador como en el numerador, concluimos:

$$\frac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} - 1 = \sec^2\alpha + 1 - 1 = \sec^2\alpha$$

$$\therefore\ \frac{\sec^4\alpha - 1}{\tan^2\alpha} - 1 = \sec^2\alpha$$

3. Si $\tan\alpha + \tan^2\alpha = 1$

calcula: $P = \cot\alpha - \tan\alpha$

Resolución:
Multiplicamos la expresión dada por $\cot\alpha$:

$(\cot\alpha)\tan\alpha + (\cot\alpha)\tan^2\alpha = (\cot\alpha)\,.\,1$ (Aplicamos Identidad recíproca)

$1 + \tan\alpha = \cot\alpha$

$\Rightarrow\ \tan\alpha = \cot\alpha - 1$ ... (1)

Nos piden calcular:
$P = \cot\alpha - \tan\alpha = \cot\alpha - (\cot\alpha - 1) = 1$

IDENTIDADES AUXILIARES

Las siguientes identidades son muy utilizadas:

1. $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta\,.\,\cos^2\theta$
2. $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\,.\,\cos^2\theta$
3. $(1 \pm \text{sen}\theta \pm \cos\theta)^2 = 2(1 \pm \text{sen}\theta)(1 \pm \cos\theta)$
4. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\,.\,\csc\theta$
5. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

Observación

De los ejemplos dados. observamos que las identidades son utilizadas para diferentes tipos de problemas:

- Problemas para demostrar.
- Problemas para simplificar.
- Problemas con alguna condición.



Nota

Para la demostración de identidades se sugiere seguir los siguientes pasos:

- Se escoge el miembro más operativo.
- Se transforma la expresión a senos y cosenos (en general).
- Se utilizan las identidades fundamentales.

Observación

La demostración de cada una de las identidades auxiliares se realiza utilizando las identidades fundamentales.



1 Demuestra:

$$[\sec\alpha + \tan\alpha - 1][1 + \sec\alpha - \tan\alpha] = 2\tan\alpha$$

Resolución:

Tomando en cuenta la nota dada anteriormente escogeremos el miembro de la izquierda por ser más operativo:

$[\sec\alpha + \tan\alpha - 1][1 + \sec\alpha - \tan\alpha]$

$[\sec\alpha + (\tan\alpha - 1)][\sec\alpha - (\tan\alpha - 1)]$

Hemos agrupado de tal manera, que se forme una diferencia de cuadrados, observa:

$\sec^2\alpha - (\tan\alpha - 1)^2 = 1 + \tan^2\alpha - (\tan^2\alpha - 2\tan\alpha + 1)$

Entonces agrupando términos semejantes:

$1 + \tan^2\alpha - \tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 = 2\tan\alpha$

Por lo tanto, se demuestra que:

$[\sec\alpha + \tan\alpha - 1][1 + \sec\alpha - \tan\alpha] = 2\tan\alpha$

2 Simplifica:

$$E = \frac{1 + \cos x}{\text{sen}x} - \frac{\text{sen}x}{1 - \cos x}$$

Resolución:

Multiplicamos en aspa la expresión dada:

$$E = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x) - (\text{sen}x)(\text{sen}x)}{(\text{sen}x)(1 - \cos x)}$$

$$E = \frac{(1 - \cos^2 x) - \text{sen}^2\alpha}{(\text{sen}x)(1 - \cos x)}$$

Recordemos la siguiente identidad pitagórica:

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

Reemplazamos en E; obtenemos:

$$E = \frac{\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x}{(\text{sen}x)(1 - \cos x)} = \frac{0}{(\text{sen}x)(1 - \cos x)}$$

$E = 0$

3 Si: $\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$

calcula:

$R = \sec^2\alpha + \csc^2\alpha$

Resolución:

Expresamos a R, en función de senos y cosenos:

$$R = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\overbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}^{\text{Identidad pitagórica}}}{\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}$$

$$R = \frac{1}{\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha}$$

Sabemos que:

$(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = (1)^2$

$\text{sen}^4\alpha + 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$

$\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

Por dato: $\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1}{2}$

Reemplazamos:

$\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

$2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

Nos piden calcular:

$$R = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

4 Simplifica la expresión:

$$Y = \frac{1 - \sec x(1 + \cos x)}{1 - \csc x(1 + \text{sen}x)}$$

Resolución:

$$Y = \frac{1 - \sec x(1 + \cos x)}{1 - \csc x(1 + \text{sen}x)} = \frac{1 - \sec x - \overbrace{\sec x\cos x}^{1}}{1 - \csc x - \underbrace{\csc x\,\text{sen}x}_{1}}$$

$$Y = \frac{1 - \sec x - 1}{1 - \csc x - 1} = \frac{-\sec x}{-\csc x} = \frac{\sec x}{\csc x}$$

$$Y = \frac{\sec x}{\csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\text{sen}x}} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \tan x$$

$\therefore\ Y = \tan x$

5 Si: $\sec x + \tan x = 4$

calcula: $T = 15\cot x + 17\cos x$

Resolución:

Sabemos por identidad pitagórica:

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$\underbrace{(\sec x + \tan x)}_{(4)}(\sec x - \tan x) = 1$

$\Rightarrow \sec x - \tan x = \frac{1}{4}$

Se forma el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sec x + \tan x = 4 & \text{... (I)} \\ \sec x - \tan x = \frac{1}{4} & \text{... (II)} \end{cases}$$

Sumando (I) y (II):

$2\sec x = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$\sec x = \frac{17}{8} \Rightarrow \cos x = \frac{8}{17}$

Restando (I) y (II):

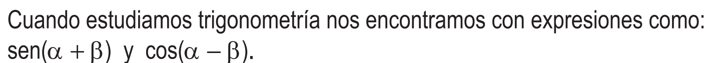
$2\tan x = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{15}{8} \Rightarrow \cot x = \frac{8}{15}$

Reemplazamos los valores en la expresión:

$T = 15\cot x + 17\cos x = 15\left(\frac{8}{15}\right) + 17\left(\frac{8}{17}\right) = 8 + 8$

$\therefore\ T = 16$

ÁNGULOS COMPUESTOS





Cuando estudiamos trigonometría nos encontramos con expresiones como:
$\text{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$.
Es importante escribir estas expresiones en términos de $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{sen}\beta$ y $\cos\beta$.
Puede resultar muy tentador reemplazar: $\text{sen}(\alpha+\beta)$ por $\text{sen}\alpha+\text{sen}\beta$ y $\text{sen}(\alpha-\beta)$ por $\cos\alpha-\cos\beta$, pero esto es un error, para ello basta tomar:

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $\beta=\frac{\pi}{6}$

Entonces:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1 \quad ; \quad \text{sen}\frac{\pi}{3}+\text{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Atención

Aquellas identidades que se deducen de las identidades de la suma y de la diferencia de dos ángulos se llaman identidades auxiliares, estas son:

- $\text{sen}(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$
- $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\text{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cot\beta\pm\cot\alpha=\dfrac{\text{sen}(\alpha\pm\beta)}{\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta}$
- $\tan\alpha\pm\tan\beta\pm\tan(\alpha\pm\beta)\tan\alpha\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)$

IDENTIDADES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Identidades de la suma de dos ángulos

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Identidades de la diferencia de dos ángulos

$$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Ejemplos:

1. Calcula sen82°

Resolución:

$$\text{sen}82°=\text{sen}(45°+37°)$$
$$=\text{sen}45°\cos37°+\cos45°\text{sen}37°$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

2. Calcula cos82°

Resolución:

$$\cos82°=\cos(45°+37°)$$
$$=\cos45°\cos37°-\text{sen}45°\text{sen}37°$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

3. Calcula tan8°

Resolución:

$$\tan8°=\tan(45°-37°)$$
$$=\frac{\tan45°-\tan37°}{1+\tan45°\tan37°}$$
$$=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+1.\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{7}$$

PROPIEDADES

1. Siendo $f(x)=a\,\text{sen}x+b\cos x;\ x\in\mathbb{R}$
se cumple:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$$

2. Si: $A+B+C=\pi$
se cumple:

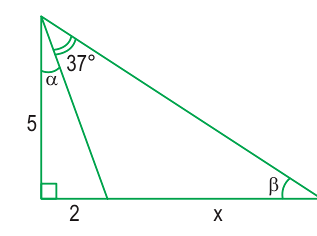
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\,.\,\tan B\,.\,\tan C$$
$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

3. Si: $A+B+C=\frac{\pi}{2}$
se cumple:

$$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$$
$$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$$

Ejemplo

Calcula "x"



Resolución:

$$\alpha+\beta+37°=90° \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan37°+\tan37°\tan\alpha=1$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2+x}+\frac{5}{2+x}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=1$$

$$\frac{23}{4(2+x)}=\frac{7}{10} \Rightarrow x=\frac{87}{14}$$

Nota

También se puede usar:
$\cot\alpha+\cot\beta+\cot37°=\cot\alpha\cot\beta\cot37°$

$$\frac{5}{2}+\frac{x+2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{4}{3}$$
$$\frac{23}{6}+\frac{x+2}{5}=\frac{10}{3}\left(\frac{x+2}{5}\right)$$
$$\frac{23}{6}=\frac{7}{3}\left(\frac{x+2}{5}\right)$$
$$x+2=\frac{115}{14}$$
$$x=\frac{87}{14}$$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$E = 5sen(37° + x) - 3cosx$

Resolución:

$E = 5(sen37°cosx + cos37°senx) - 3cosx$

$E = 5(\frac{3}{5}cosx + \frac{4}{5}senx) - 3cosx$

$E = 3cosx + 4senx - 3cosx$

$E = 4senx$

2 Si: $sen(x + y) = 3sen(x - y)$, calcula:

$E = tanxcoty$

Resolución:

$senxcosy + cosxseny = 3(senxcosy - cosxseny)$

$4cosxseny = 2senxcosy$

$2 = \frac{senx\cos y}{\cos xseny}$

$\Rightarrow E = tanxcoty = 2$

3 Calcula:

$A = 2sen50° - 4cos40°sen10°$

Resolución:

$A = 2[sen(40° + 10°) - 2cos40°sen10°]$

$A = 2[sen40°cos10° + cos40°sen10° - 2cos40°sen10°]$

$A = 2[sen40°cos10° - cos40°sen10°]$

$A = 2sen(40° - 10°) = 2sen30° = 2\left(\frac{1}{2}\right)$

$A = 1$

4 Calcula:

$E = \frac{\cos 25° + \sqrt{3}\,sen25°}{sen10° + \cos 10°}$

Resolución:

$E = \frac{2\left[\frac{1}{2}\cos 25° + \frac{\sqrt{3}}{2}sen25°\right]}{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}sen10° + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10°\right]}$

$E = \frac{2[\cos 60°\cos 25° + sen60°sen25°]}{\sqrt{2}[\cos 45°sen10° + sen45°\cos 10°]}$

$E = \frac{2\cos(60° - 25°)}{\sqrt{2}\,sen(45° + 10°)} = \frac{\sqrt{2}\cos 35°}{sen55°}$

$E = \sqrt{2}$

5 En un triángulo ABC se cumple: $tanA + tanB = 3tanC$

Calcula: $tanAtanB$

Resolución:

Como: $A + B + C = 180°$

Por propiedad:

$tanA + tanB + tanC = tanAtanBtanC$ ...(1)

Reemplazando el dato en (1):

$3tanC + tanC = tanAtanBtanC$

$4tanC = tanAtanBtanC$

$\Rightarrow tanAtanB = 4$

6 Si: $tan\alpha + tan\beta = 1$ y $tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$

calcula: $tan\alpha tan\beta$

Resolución:

$tan(\alpha + \beta) = \frac{4}{3}$

$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha tan\beta} = \frac{4}{3}$ ...(1)

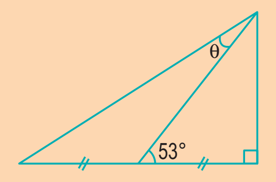
Reemplazando el dato: $tan\alpha + tan\beta = 1$ en (1):

$\frac{1}{1 - tan\alpha tan\beta} = \frac{4}{3}$

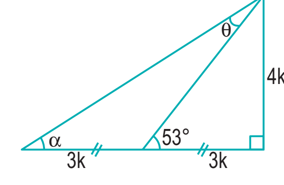
$\Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$

$\Rightarrow tan\alpha tan\beta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

7 Calcula: $tan\theta$



Resolución:



$tan\alpha = \frac{4k}{6k} = \frac{2}{3}$

$\theta + \alpha = 53°$

$\theta = 53° - \alpha$

$\Rightarrow tan\theta = tan(53° - \alpha) = \frac{tan53° - tan\alpha}{1 + tan53°tan\alpha}$

$tan\theta = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{8}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{17}{9}}$

$\therefore tan\theta = \frac{6}{17}$

IDENTIDADES DE ÁNGULO DOBLE

- $\text{sen}2\theta = \text{sen}(\theta + \theta)$
  $= \text{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\,\text{sen}\theta$
  $\Rightarrow \boxed{\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta}$

- $\cos2\theta = \cos(\theta + \theta)$
  $= \cos\theta\cos\theta - \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta$
  $\Rightarrow \boxed{\cos2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta}$

Además:

- $\cos2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$
  $= (1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}^2\theta$
  $\Rightarrow \boxed{\cos2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta}$

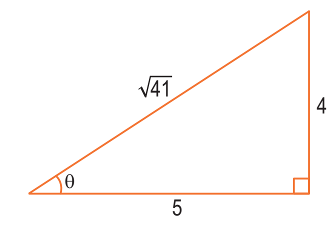
- $\cos2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$
  $\cos2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$
  $\Rightarrow \boxed{\cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1}$

- $\tan2\theta = \tan(\theta + \theta)$
  $= \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$
  $\Rightarrow \tan2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Ejemplos:

1. Si $\tan\theta = \dfrac{4}{5}$, halla $\text{sen}2\theta$.

   Resolución:



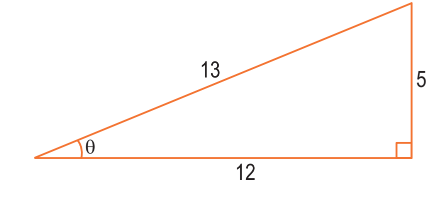
$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$

$\text{sen}2\theta = 2\,.\,\dfrac{4}{\sqrt{41}}\,.\,\dfrac{5}{\sqrt{41}}$

$\text{sen}2\theta = \dfrac{40}{41}$

2. Si $\text{sen}\theta = \dfrac{5}{13}$, calcula $\cos2\theta$.

   Resolución:



$\cos2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

$\cos2\alpha = \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2$

$\cos2\alpha = \dfrac{144}{169} - \dfrac{25}{169} = \dfrac{119}{169}$

3. Si: $\tan^2\theta + 5\tan\theta = 1$, calcula $\tan2\theta$.

   Resolución:

   Del dato: $1 - \tan^2\theta = 5\tan\theta$

   Luego: $\tan2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

   $\tan2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{5\tan\theta}$

   $\therefore\ \tan2\theta = \dfrac{2}{5}$

Observación

En la figura que se muestra podemos hallar las RT del ángulo doble en función de $\tan\theta$.

1 + tan²θ
2tanθ
2θ
1 – tan²θ



Nota

De las identidades de ángulo doble se deducen:

$\boxed{\cot\theta + \tan\theta = 2\csc2\theta}$

$\boxed{\cot\theta - \tan\theta = 2\cot2\theta}$



IDENTIDADES DE ÁNGULO MITAD

$$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$
$$2\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$$
$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$
$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$$

Observación

El signo + o – depende del cuadrante en el cual se ubique el ángulo mitad y de la RT que lo afecte.

Ejemplo:
Si $\frac{x}{2} \in \text{IIIC} \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ es (–)

Ejemplos:

1. Si: $\cos x = -\frac{2}{3} \wedge 90° < x < 180°$, calcula $\text{sen}\frac{x}{2}$.

Resolución:

$90 < x < 180° \Rightarrow 45° < \frac{x}{2} < 90°$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \in \text{IC}$

$$\text{sen}\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{5}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$
$$\therefore\ \text{sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

2. Si: $\cos\theta = \frac{1}{8} \wedge 0° < \theta < 90°$; calcula $\cos\frac{\theta}{2}$.

Resolución:

$0° < \theta° < 90° \Rightarrow 0° < \frac{\theta}{2} < 45° \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \text{IC}$

$$\cos\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{8}}{2}} = \frac{3}{4}$$
$$\therefore\ \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$$

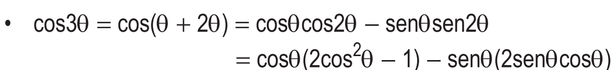
Nota

De las identidades de ángulo mitad se deducen:

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta}$$
$$\boxed{\cot\frac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta}$$

IDENTIDADES DE ÁNGULO TRIPLE

- $\text{sen}3\theta = \text{sen}(\theta + 2\theta) = \text{sen}\theta\cos2\theta + \cos\theta\,\text{sen}2\theta$
$$= \text{sen}\theta(1 - 2\text{sen}^2\theta) + \cos\theta(2\text{sen}\theta\cos\theta)$$
$$= \text{sen}\theta - 2\text{sen}^3\theta + 2\text{sen}\theta(1 - \text{sen}^2\theta)$$
$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta}$$



- $\cos3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos2\theta - \text{sen}\theta\,\text{sen}2\theta$
$$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \text{sen}\theta(2\text{sen}\theta\cos\theta)$$
$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$$



- $\tan3\theta = \tan(\theta + 2\theta) = \dfrac{\tan\theta + \tan2\theta}{1 - \tan\theta\tan2\theta}$
$$= \frac{\tan\theta + \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1 - \tan\theta\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\tan3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}}$$

Nota

De las identidades de ángulo triple se deducen:

- $\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos2x + 1)$
- $\cos3x = \cos x(2\cos2x - 1)$
- $4\text{sen}x\,\text{sen}(60 - x)\text{sen}(60 + x) = \text{sen}3x$
- $4\cos x\cos(60 - x)\cos(60 + x) = \cos3x$
- $\tan x\tan(60 - x)\tan(60 + x) = \tan3x$

Ejemplos:

1. $\text{sen}27° = 3\text{sen}9° - 4\text{sen}^39$
2. $\cos51° = 4\cos^317 - 3\cos17°$
3. $\cos15x = 4\cos^35x - 3\cos5x$
4. $\tan63° = \dfrac{3\tan21° - \tan^321}{1 - 3\tan^221}$
5. $\tan9\theta = \dfrac{3\tan3\theta - \tan^33\theta}{1 - 3\tan^23\theta}$

Problemas resueltos

1 Simplifica:
E = cosxcos2xcos4xcos8x

Resolución:

$E = \frac{2\text{senx}}{2\text{senx}}(\text{cosxcos2xcos4xcos8x})$

$E = \frac{\text{sen2x}}{2\text{senx}}\text{cos2xcos4xcos8x}$

$E = \frac{(2\text{sen2x}\cos 2x)\cos 4x\cos 8x}{4\text{senx}}$

$E = \frac{2\text{sen4x}\cos 4x\cos 8x}{8\text{senx}} = \frac{\text{sen8x}\cos 8x}{8\text{senx}}$

$E = \frac{2\text{sen8x}\cos 8x}{16\text{senx}} = \frac{\text{sen16x}}{16\text{senx}}$

Utilizando la fórmula:
$E = \text{cosxcos2xcos}2^2\text{xcos}2^3\text{x}$

$E = \frac{\text{sen}2^{3+1}x}{2^{3+1}\text{senx}} = \frac{\text{sen16x}}{16\text{senx}}$

2 Simplifica:
$A = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 8\cot8\theta$

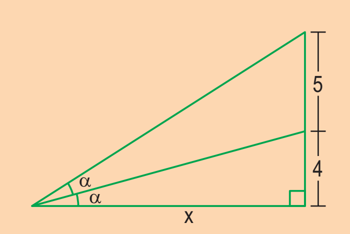
Resolución:

Sabemos que:

$$2\cot2x = \cot x - \tan x$$

$A = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 4(2\cot8\theta)$
$A = \tan\theta + 2\tan2\theta + 4\tan4\theta + 4(\cot4\theta - \tan4\theta)$
$A = \tan\theta + 2\tan2\theta + 2(\cot2\theta - \tan2\theta)$
$A = \tan\theta + 2\cot2\theta$
$A = \tan\theta + (\cot\theta - \tan\theta) = \cot\theta$
$A = \cot\theta$

3 Halla x:



Resolución:

Del gráfico:
$\tan2\alpha = \frac{9}{x} \quad \wedge \quad \tan\alpha = \frac{4}{x}$

Por identidad:
$\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$$\frac{9}{x} = \frac{2\left(\frac{4}{x}\right)}{1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{\frac{8}{x}}{\frac{x^2 - 16}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{x} = \frac{8x}{x^2 - 16}$$

$\Rightarrow 9x^2 - 144 = 8x^2 \Rightarrow x^2 = 144 \qquad \therefore x = 12$

4 Si: $x = \frac{\pi}{8}$,
calcula: $W = 4\text{senxcos}^3x - 4\text{sen}^3\text{xcosx}$

Resolución:

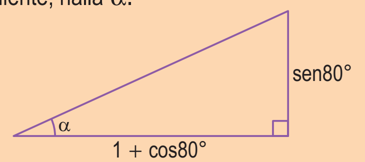
$W = 4\text{senxcosx}(\cos^2x - \text{sen}^2x)$
$W = 2 \cdot 2\,\text{senxcosxcos2x}$
$W = 2\text{sen2xcos2x}$
$W = \text{sen4x}$

Reemplazando $x = \frac{\pi}{8}$, tenemos:

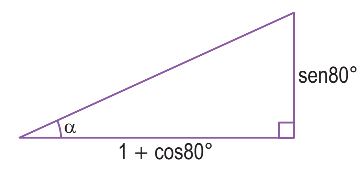
$\therefore\ W = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$



5 Del gráfico siguiente, halla α.



Resolución:



$\frac{\text{sen80°}}{1 + \cos 80°} = \tan\alpha$

$\Rightarrow \frac{2\text{sen40°}\cos 40°}{1 + 2\cos^2 40° - 1} = \tan\alpha$

Simplificando:
$\frac{\text{sen40°}}{\cos40°} = \tan\alpha$

$\tan40° = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = 40°$



6 Si: sen2x = 0,4;
calcula $E = \text{sen}^4x + \cos^4x$

Resolución:

$\text{sen2x} = 0{,}4 = \frac{2}{5}$

$(2\text{senxcosx})^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow 4\text{sen}^2x\cos^2x = \frac{4}{25}$

Sabemos que:
$(\text{sen}^2x + \cos^2x)^2 = 1^2$
$\text{sen}^4x + 2\text{sen}^2x\cos^2x + \cos^4x = 1$

$\text{sen}^4x + \cos^4x + \left(\frac{4\text{sen}^2x\cos^2x}{2}\right) = 1$

$\text{sen}^4x + \cos^4x + \left(\frac{\frac{4}{25}}{\frac{2}{1}}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^4x + \cos^4x = 1 - \frac{2}{25}$

$\text{sen}^4x + \cos^4x = \frac{23}{25} = 0{,}92$

7 Calcula:
$A = \csc5° + \csc10° + \csc20° + \cot20°$

Resolución:

Sabemos que:

$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x + \cot x$

$A = \csc5° + \csc10° + (\csc20° + \cot20°)$

$A = \csc5° + (\csc10° + \cot10°)$

$A = \csc5° + \cot5°$

$A = \cot2°30'$

8 ¿A qué es igual
$E = \sec x + \tan x - \cot\left(45° - \frac{x}{2}\right)$?

Resolución:

$E = (\csc(90° - x) + \cot(90° - x)) - \cot\left(45° - \frac{x}{2}\right)$

Sabemos que:

$\csc\theta + \cot\theta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$E = \cot\left(\frac{90° - x}{2}\right) - \cot\left(45° - \frac{x}{2}\right)$

$E = \cot\left(45° - \frac{x}{2}\right) - \cot\left(45° - \frac{x}{2}\right)$

$E = 0$

9 Si $\cot\frac{\theta}{2} = -\frac{3}{2}$, halla $\cos\theta$.

Resolución:

$\cot\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$

$-\frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}}\right)^2$

$\frac{9}{4} = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

$9 - 9\cos\theta = 4 + 4\cos\theta$

$5 = 13\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{5}{13}$

10 Calcula $\sec\frac{\alpha}{2}$, sabiendo que:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3},\ \alpha \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

Resolución:

Como: $\alpha \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \alpha \in \text{IIIC}$

Además: $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \text{IVC}$

Como: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-2}{3}$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

$\therefore \sec\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{6}$

11 Calcula:

$$E = \frac{\cos^3 20° + \cos^3 40°}{\cos20° + \cos40°}$$

Resolución:

$4E = \frac{4\cos^3 20° + 4\cos^3 40°}{\cos 20° + \cos 40°}$

Utilizando las fórmulas de degradación:

$4E = \frac{(3\cos 20° + \cos 60°) + (3\cos 40° + \cos 120°)}{\cos 20° + \cos 40°}$

$4E = \frac{3\cos 20° + \cos 60° + 3\cos 40° - \cos 60°}{\cos 20° + \cos 40°}$

$4E = \frac{3(\cos 20° + \cos 40°)}{\cos 20° + \cos 40°} \quad \Rightarrow \quad 4E = 3$

$\therefore\ E = \frac{3}{4}$

12 Simplifica:

$$E = \frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}3x}$$

Resolución:

$E = \frac{\cos^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x + (3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x)}$

$E = \frac{\cos^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x}$

$E = \frac{-3\cos^3 x + 3\cos x}{3\operatorname{sen}x - 3\operatorname{sen}^3 x} = \frac{3\cos x(-\cos^2 x + 1)}{3\operatorname{sen}x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}$

$E = \frac{3\cos x(\operatorname{sen}^2 x)}{3\operatorname{sen}x(\cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \tan x$

13 Sabiendo que: $\operatorname{sen}(60° - \alpha) = \frac{1}{3}$, calcula: $F = \operatorname{sen}3\alpha$

Resolución:

Haciendo: $x = 60° - \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{3}$; además: $\alpha = 60° - x$

Luego: $\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}3(60° - x) = \operatorname{sen}(180° - 3x)$

$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}3x = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$

$\Rightarrow F = \operatorname{sen}3\alpha = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\therefore F = \frac{23}{27}$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las transformaciones trigonométricas son utilizadas para convertir sumas o restas de razones trigonométricas en producto y viceversa.

Las transformaciones trigonométricas se dividen en:



TRANSFORMACIONES DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

$$\text{senA}+\text{senB}=2\text{sen}\frac{(A+B)}{2}.\cos\frac{(A-B)}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{(A+B)}{2}.\cos\frac{(A-B)}{2}$$

$$\text{senA}-\text{senB}=2\cos\frac{(A+B)}{2}.\text{sen}\frac{(A-B)}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\text{sen}\frac{(A+B)}{2}.\text{sen}\frac{(A-B)}{2}$$

Ejemplos:
Transforma a producto:

a) $\text{sen}100° - \text{sen}50° = 2\cos\frac{(100°+50°)}{2}.\text{sen}\frac{(100°-50°)}{2}$

$= 2\cos75° \,.\, \text{sen}25°$

b) $\cos70° - \cos80° = -2\text{sen}\frac{(70°+80°)}{2}.\text{sen}\frac{(70°-80°)}{2}$

$= 2\text{sen}75° \,.\, \text{sen}5°$

Propiedades

Sea $A + B + C = 180°$, se cumple lo siguiente:

$$\text{senA}+\text{senB}+\text{senC}=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2}+1$$

$$\text{sen}2A+\text{sen}2B+\text{sen}2C=4\text{senA}\,.\,\text{senB}\,.\,\text{senC}$$

$$\cos2A+\cos2B+\cos2C=-4\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C-1$$

TRANSFORMACIONES DE PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA

$$2\text{senA}\,.\,\cos B=\text{sen}(A+B)+\text{sen}(A-B)$$

$$2\cos A\,.\,\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\cos A\,.\,\text{senB}=\text{sen}(A+B)-\text{sen}(A-B)$$

$$2\text{senA}\,.\,\text{senB}=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

Ejemplos:
Transforma a suma o diferencia:

a) $2\cos7a \,.\, \text{sen}5a = \text{sen}(7a+5a) - \text{sen}(7a-5a)$

$= \text{sen}12a - \text{sen}2a$

b) $2\cos3\theta \,.\, \cos2\theta = \cos(3\theta+2\theta) + \cos(3\theta-2\theta)$

$= \cos5\theta + \cos\theta$



Observación

Las transformaciones trigonométricas solo se aplican en caso de tener una suma o diferencia de senos o de cosenos, no hay identidades especiales para otros casos.

Importante

Para realizar las demostraciones de cada una de las transformaciones se deberá usar las identidades de ángulos compuestos.



Nota

Identidades auxiliares

$\cos^2A + \cos^2B = 1 + \cos(A+B) \,.\, \cos(A-B)$

$\text{sen}^2A + \text{sen}^2B = 1 - \cos(A+B) \,.\, \cos(A-B)$

Propiedades adicionales

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{(2n-1)\pi}{(2n+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+...+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

Recuerda

Veamos la siguiente propiedad:

Si: A + B + C = 180°,

entonces:
tanA + tanB + tanC = tanA . tanB . tanC

Aplicaciones de las transformaciones trigonométricas:

1. Factoriza:
   M = cos8x – cos7x . cosx – cos10x . cos2x

   Resolución:

   Transformamos de producto a suma:

   $$\cos7x\,.\,\cos x=\frac{2\cos7x.\cos x}{2}=\frac{\cos8x+\cos6x}{2}$$

   $$\cos10x.\cos2x=\frac{2\cos10x.\cos2x}{2}=\frac{\cos12x+\cos8x}{2}$$

   Reemplazamos en M:

   $$M=\cos8x-\frac{(\cos8x+\cos6x)}{2}-\frac{(\cos12x+\cos8x)}{2}$$

   $$M=\frac{1}{2}(2\cos8x-\cos8x-\cos6x-\cos12x-\cos8x)$$

   $$M=-\frac{1}{2}(\cos6x+\cos12x)=-\frac{1}{2}(2\cos9x\,.\,\cos3x)$$

   M = – cos9x . cos3x

2. Simplifica la expresión:

   $$M=\frac{\text{sen}10°+\text{sen}20°+\text{sen}30°}{\cos10°+\cos20°+\cos30°}$$

   Resolución:
   Agrupamos convenientemente:

   $$M=\frac{(\text{sen}30°+\text{sen}10°)+\text{sen}20°}{(\cos30°+\cos10°)+\cos20°}$$

   Transformamos a producto:

   a) sen30° + sen10°

   $$=2\text{sen}\left(\frac{30°+10°}{2}\right)\cos\left(\frac{30°-10°}{2}\right)$$

   $$=2\text{sen}20°\cos10°$$

   b) cos30° + cos10°

   $$=2\cos\left(\frac{30°+10°}{2}\right)\cos\left(\frac{30°-10°}{2}\right)$$

   $$=2\cos20°\cos10°$$

   Reemplazamos a y b en (1):

   $$M=\frac{2\text{sen}20°\cos10°+\text{sen}20°}{2\cos20°\cos10°+\cos20°}$$

   $$M=\frac{\text{sen}20°(2\cos10°+1)}{\cos20°(2\cos10°+1)}$$

   $$M=\frac{\text{sen}20°}{\cos20°}$$

   ∴ E = tan20°

3. Calcula el valor de:

   $$P=\frac{\text{sen}5x+\text{sen}3x}{\cos5x+\cos3x},\text{ cuando: } x=\frac{\pi}{12}\text{ rad}$$

   Resolución:

   Transformamos a producto el numerador y denominador de la expresión dada:

   $$P=\frac{2\text{sen}\left(\frac{5x+3x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}$$

   $$P=\frac{2\text{sen}4x\,.\,\cos x}{2\cos4x\,.\,\cos x}$$

   $$P=\frac{\text{sen}\,4x}{\cos4x}\Rightarrow P=\tan4x$$

   Reemplazando el valor de "x" tenemos:

   $$P=\tan\left[1\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\Rightarrow P=\tan\frac{\pi}{3}$$

   $$\therefore P=\sqrt{3}$$

4. Simplifica:
   P = sen2x + sen4x + sen6x + sen8x

   Resolución:

   Agrupamos de manera conveniente y obtenemos:

   P = (sen2x + sen8x) + (sen4x + sen6x)

   P = 2sen5x . cos(–3x) + 2sen5x . cos(–x)

   P = 2sen5x . cos3x + 2sen5x . cosx

   P = 2sen5x(cos3x + cosx)

   P = 2sen5x(2cos2x . cosx)

   P = 4sen5x . cos2x . cosx

Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$I=\frac{\cos 5x+\cos 3x+\cos x}{\text{sen}5x+\text{sen}3x+\text{sen}x}$$

Resolución:

$$I=\frac{2\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)+\cos 3x}{2\text{sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)+\text{sen}3x}$$

$$I=\frac{2\cos 3x\,.\cos 2x+\cos 3x}{2\text{sen}3x\,.\cos 2x+\text{sen}3x}$$

$$I=\frac{\cos 3x(2\cos 2x+1)}{\text{sen}3x(2\cos 2x+1)}$$

$\Rightarrow I=\cot 3x$

2 Calcula: $M=\text{sen}55°.\cos 5°+\text{sen}35°.\text{sen}5°$

Resolución:

$$M=\frac{2\text{sen}55°.\cos 5°}{2}+\frac{2\text{sen}35°.\text{sen}5°}{2}$$

$$M=\frac{\text{sen}(55°+5°)+\text{sen}(55°-5°)}{2}+\frac{\cos(35°-5°)-\cos(35°+5°)}{2}$$

$$M=\frac{\text{sen}60°+\text{sen}50°+\cos 30°-\cos 40°}{2}$$

$$M=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\text{sen}50°+\frac{\sqrt{3}}{2}-\text{sen}50°}{2}$$

$$\Rightarrow M=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 Calcula:

$$I=\frac{1-4\text{sen}10°\text{sen}70°}{2\text{sen}10°}$$

Resolución:

$$I=\frac{1-2(2\text{sen}10°\text{sen}70°)}{2\text{sen}10°}$$

$$I=\frac{1-2(\cos(10°-70°)-\cos(10°+70°))}{2\text{sen}10°}$$

$$I=\frac{1-2(\cos(-60°)-\cos 80°)}{2\text{sen}10°}$$

$$I=\frac{1-2(\cos 60°-\cos 80°)}{2\text{sen}10°}=\frac{1-2\cos 60°+2\cos 80°}{2\text{sen}10°}$$

$$I=\frac{1-2\left(\frac{1}{2}\right)+2\cos 80°}{2\text{sen}10°}=\frac{2\cos 80°}{2\text{sen}10°}=\frac{\cos 80°}{\text{sen}10°}$$

$$I=\frac{\text{sen}10°}{\text{sen}10°}\Rightarrow I=1$$

4 Si: $x=\frac{3\pi}{20}$, calcula: $N=\cos 2x\,.\,\text{sen}7x+\text{sen}3x\,.\,\cos 8x$

Resolución:

$$N=\frac{2\cos 2x\,.\,\text{sen}7x}{2}+\frac{2\text{sen}3x\,.\cos 8x}{2}$$

$$N=\frac{\text{sen}(7x+2x)+\text{sen}(7x-2x)}{2}+\frac{\text{sen}(3x+8x)+\text{sen}(3x-8x)}{2}$$

$$N=\frac{\text{sen}9x+\text{sen}5x}{2}+\frac{\text{sen}11x+\text{sen}(-5x)}{2}$$

$$N=\frac{\text{sen}9x+\text{sen}5x+\text{sen}11x-\text{sen}5x}{2}$$

$$N=\frac{\text{sen}9x+\text{sen}11x}{2}$$

$$N=\frac{2\text{sen}\left(\frac{9x+11x}{2}\right).\cos\left(\frac{9x-11x}{2}\right)}{2}$$

$N=\text{sen}10x\,.\,\cos(-x)=\text{sen}10x\,.\,\cos x$

$$N=\text{sen}\left(10\,.\,\frac{3\pi}{20}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right)=\underbrace{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}\cos 27°$$

$\Rightarrow N=-\cos 27°$

5 Simplifica:

$$A=\frac{\cos(a-3b)-\cos(3a-b)}{\text{sen}2a+\text{sen}2b}$$

Resolución:

$$A=\frac{-2\text{sen}\left(\frac{a-3b+3a-b}{2}\right).\,\text{sen}\left(\frac{a-3b-(3a-b)}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{2a+2b}{2}\right).\cos\left(\frac{2a-2b}{2}\right)}$$

$$A=\frac{\text{sen}2(a-b).\text{sen}(-(-a-b))}{\text{sen}(a+b)\,.\cos(a-b)}$$

$$A=\frac{2\text{sen}(a-b)\,.\cos(a-b)\,.\,\text{sen}(a+b)}{\text{sen}(a+b)\,.\cos(a-b)}\Rightarrow A=2\text{sen}(a-b)$$

6 Simplifica la expresión: $T=3+5\text{sen}23°$

Resolución:

Factorizamos (5) en la expresión a reducir:

$$T=5\left[\frac{3}{5}+\text{sen }23°\right]$$

$T=5[\text{sen }37°+\text{sen }23°]$

Transformamos a producto:

$$T=5\left[2\text{sen}\left(\frac{37°+23°}{2}\right).\cos\left(\frac{37°-23°}{2}\right)\right]$$

$T=10\text{sen }30°\cos 7°$

$T=10\left(\frac{1}{2}\right)\cos 7° \qquad \therefore T=5\cos 7°$

UNIDAD 4

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

CONCEPTOS PREVIOS

Noción de función

Sean A y B conjuntos diferentes del vacío, se llama función f al conjunto de pares ordenados (x; y) tales que para cada $x \in A$ existe uno y solo un elemento $y \in B$.

$$f(x) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = f(x) \ \forall \ x \in \text{Domf}\}$$

Observación

A la notación $y = f(x)$ se le llama regla de correspondencia o dependencia funcional, y se lee:
"y igual a f de x", donde:
y: variable dependiente.
x: variable independiente.



Dominio de una función

Es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados que define a la función, y se denota por:

$$\text{Domf} = \{x \in A / (x; y) \in f\}$$

Rango de una función

Es el conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados que define a la función, y se denota por:

$$\text{Ranf} = \{y \in B / (x; y) \in f\}$$

Gráfica de una función

Se denomina gráfica de una función real de variable real al conjunto de puntos en el plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la condición $y = f(x)$.

Ejemplos:

1. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{2}{\text{sen}3x} + \text{sen}x$$

Resolución:
Para que f(x) exista, $\text{sen}3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 0, \pi; 2\pi,$

$3x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \neq \frac{n\pi}{3}$

$\therefore \text{Dom} = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{3}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

2. Halla el rango de la función:

$$f(x) = \frac{9 + \text{sen}3x}{4}$$

Resolución:
Se sabe que: $-1 \leq \text{sen}3x \leq 1$

$8 \leq 9 + \text{sen}3x \leq 10$

$2 \leq \frac{9 + \text{sen}3x}{4} \leq \frac{5}{2}$

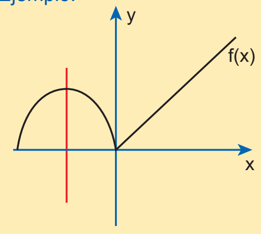
$2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$

$\therefore \text{Ranf} = \left[2; \frac{5}{2}\right]$

Atención

Para reconocer si una gráfica es función, toda recta vertical tendrá que cortarla en un solo punto.

Ejemplo:



"f(x) sí es función"

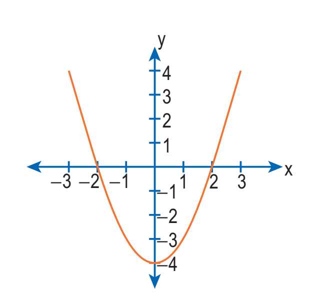


3. Construye la gráfica de la siguiente función:

$f(x) = x^2 - 4$

Resolución:
Es claro que $\text{Domf} = \mathbb{R}$, luego tabulamos algunos valores para hallar la gráfica.

x	y
–3	5
–2	0
–1	–3
0	–4
1	3
2	0
3	5



TIPOS DE FUNCIONES

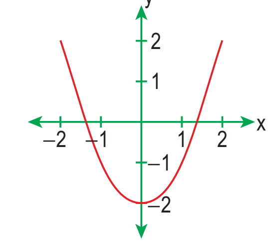
Función par

Una función es par si:

$$f(x) = f(-x),\ \forall x \wedge -x \in Domf$$

Ejemplo:
$f(x) = x^2 - 2$

Hallamos $f(-x)$:
$f(-x) = (-x)^2 - 2$
$= x^2 - 2$
$= f(x)$



Observación

Otros ejemplos de funciones pares son:
$y = \cos x$
$y = \sec x$



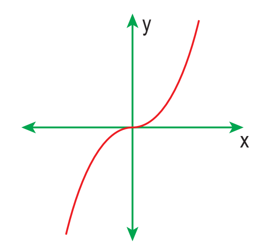
Función impar

Una función es impar si:

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \wedge -x \in Domf$$

Ejemplo:
$f(x) = x^3$

Hallamos $f(-x)$:
$f(-x) = (-x)^3$
$= -x^3$
$= -f(x)$



Observación

Otros ejemplos de funciones impares son:
$y = \operatorname{sen} x$
$y = \tan x$
$y = \cot x$
$y = \csc x$

Función creciente

Una función es creciente en un intervalo de su dominio, si para todo par de números x_1, x_2 de dicho intervalo se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Función decreciente

Una función es decreciente en un intervalo de su dominio, si para todo par de números x_1, x_2 de dicho intervalo se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Observación

Una función creciente tiene una gráfica que sube de izquierda a derecha, mientras que una función decreciente tiene una gráfica que cae de izquierda a derecha.



Función periódica

Una función es periódica, si existe un número real $T \neq 0$, tal que para cualquier x de su dominio se cumple:

$$f(x + T) = f(x),\ \forall x,\ x + T \in Domf$$

Ejemplo:
Halla el periodo principal de: $f(x) = \operatorname{sen} x$

Resolución:
$f(x + T) = \operatorname{sen}(x + T)$
$\operatorname{sen}(x + T) = \operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x \cos T + \cos x \operatorname{sen} T = \operatorname{sen} x$

Hacemos: $\cos T = 1 \wedge \operatorname{sen} T = 0$
$\Rightarrow T = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}^+$
$T = 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi$
$\therefore$ El período principal es 2π.

Nota

El número T se denomina periodo principal, si es positivo y mínimo entre todos los períodos positivos.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son el conjunto de pares ordenados (x; y) tal que la primera componente es un valor angular expresado en radianes y la segunda el valor obtenido mediante una dependencia funcional.

Nota

Función	sen 7x	$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	[–1; 1]	[–1; 1]
Periodo(T)	2π/7	2π

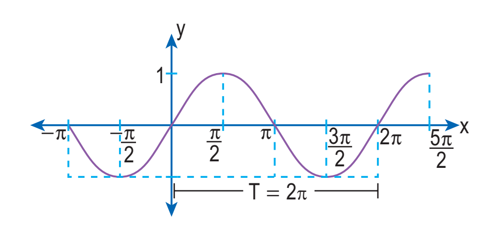
Función seno

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{sen}x; x \in \mathbb{R}\}$

Tabulando valores

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
y	0	–1	0	0,5	0,7	0,8	1	0	–1	0	1

Gráfico



Análisis del gráfico:
- Dominio: Domf = $\mathbb{R}$
- Rango: Ranf = [–1; 1]
- Período: T = 2π
- Función impar: sen(–x) = –senx
- Curva: senoide

Función coseno

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cos x; x \in \mathbb{R}\}$

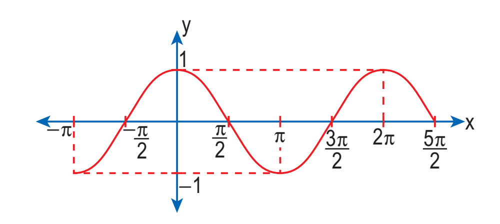
Nota

Función	$\cos^2 x$	2 + cosx
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Rango	[0; 1]	[1; 3]
Periodo(T)	π	2π

Tabulando valores

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
y	–1	0	1	0,8	0,7	0,5	0	–1	0	1	0

Gráfico



Análisis del gráfico:
- Dominio: Domf = $\mathbb{R}$
- Rango: Ranf = [–1; 1]
- Período: T = 2π
- Función impar: cos(–x) = cosx
- Curva: cosenoide

Función tangente

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \tan x; x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$

Nota

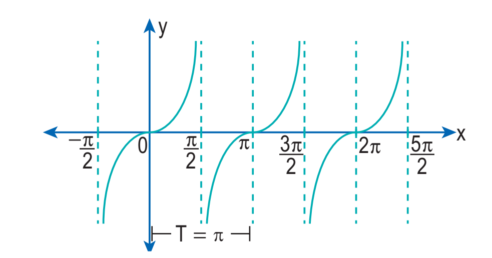
Función: 7tanx

Dominio: $\mathbb{R} - (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Rango: $\mathbb{R}$

Periodo(T): π

Gráfico

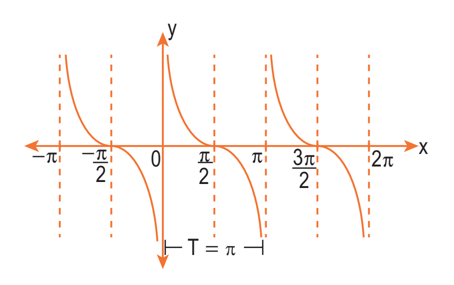


Analisis de gráfico:
- Dominio: Domf = $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$
- Rango: Ranf = $\mathbb{R}$
- Periodo: T = π
- Función impar: tan(–x) = –tanx
- Curva: tangentoide

Función cotangente

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cot x; x \in \mathbb{R} - n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$

Gráfico



Análisis del gráfico:

- Dominio: $Domf = \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$
- Rango: $Ranf = \mathbb{R}$
- Periodo: $T = \pi$
- Función impar: $\cot(-x) = -\cot x$
- Curva: cotangentoide

Nota

Función: $\cot^2 x$

Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

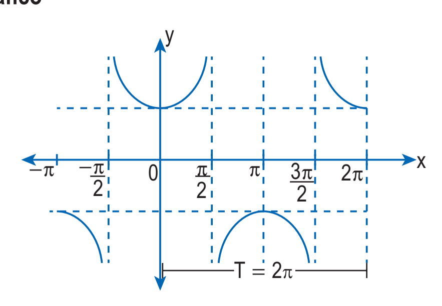
Rango: $[0; +\infty\rangle$

Periodo(T): π

Función secante

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sec x; x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$

Gráfico



Análisis del gráfico:

- Dominio:

  $Domf = \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\}; n \in \mathbb{Z}$
- Rango: $Ranf = \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

  $\Rightarrow \sec x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función par: $\sec(-x) = \sec x$
- Curva: secantoide

Nota

Función: $\sec^2 x$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

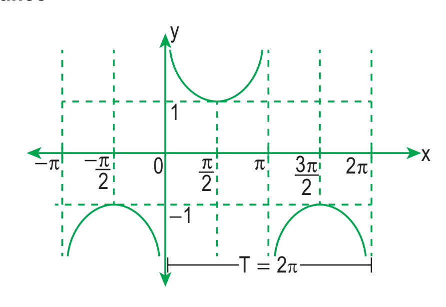
Rango: $[1; +\infty\rangle$

Periodo(T): π

Función cosecante

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \csc x; x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}\}$

Gráfico



Análisis del gráfico:

- Dominio: $Domf = \mathbb{R} - \{n\pi\}, n \in \mathbb{Z}$
- Rango: $Ranf = \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

  $\Rightarrow \csc x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
- Periodo: $T = 2\pi$
- Función impar: $\csc(-x) = -\csc x$
- Curva: cosecantoide

Nota

Función: $\csc\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{9} + \frac{\pi}{36}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

Rango: $\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

Periodo (T): $\frac{2\pi}{9}$

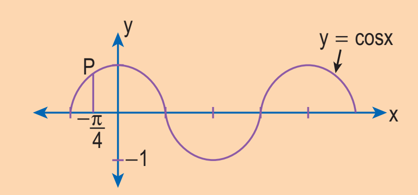
Ejemplos:

Función	Dominio ($k \in \mathbb{Z}$)	Rango	T
$y = 3\text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-3; 3]$	2π
$y = 2 + 3\text{sen}x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 5]$	2π
$y = 7\tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R}$	π
$y = \csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$	2π
$y = 7\csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle -7; 7\rangle$	2π
$y = 13 + \csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle 12; 14\rangle$	2π
$y = 13 + 5\csc x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$\mathbb{R} - \langle -8; 18\rangle$	2π



Problemas resueltos

1 Calcula las coordenadas del punto P.



Resolución:

Sea el punto $P = \left(-\frac{\pi}{4}; a\right)$.

$a = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore P = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2 Dada la función definida por:
$f(x) = 3|\cos x| + 4, \forall\, x \in \mathbb{R}$
Halla su rango.

Resolución:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1$

$0 \leq 3|\cos x| \leq 3$

$4 \leq 3|\cos x| + 4 \leq 7$

$\Rightarrow \text{Ranf} = [4; 7]$

3 Hallar el máximo valor de:
$f(x) = \cos x(\cos x - 4) + 7$

Resolución:

$f(x) = \cos^2 x - 4\cos x + 7$

$f(x) = \underbrace{\cos^2 x - 4\cos x + 4} + 3$

$f(x) = (\cos x - 2)^2 + 3$

Como:

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-3 \leq \cos x - 2 \leq -1$

$1 \leq (\cos x - 2)^2 \leq 9$

$4 \leq (\cos x - 2)^2 + 3 \leq 12$

Luego: El máximo valor de f(x) es 12.

4 Halla el dominio de la función:
$f(x) = 3\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Resolución:

$2x - \frac{\pi}{3} = (2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$2x = np + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = n\pi + \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}$

$\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

5 Determina el dominio de:
$f(x) = 11\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

Función de referencia: y = secx

$\text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

$x - \frac{\pi}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$x = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{3}{4}\right)\pi$

$x = (4n+3)\frac{\pi}{4}$

$\text{Domf} = \mathbb{R} - \{(4n+3)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\}$

6 Determina el dominio y rango de: $f(x) = \frac{3\sec 2x}{\csc 4x}$

Resolución:

Restricciones:

$\sec 2x$: $2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$ ...(1)

$\csc 4x$: $4x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}$ ...(2)

De (1) y (2): $x \neq \frac{k\pi}{4}$

$\Rightarrow \text{Domf} = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Reduciendo:

$f(x) = \frac{3\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)}{\left(\frac{1}{\text{sen}4x}\right)} = \frac{3\text{sen}4x}{\cos 2x} = \frac{6\text{sen}2x\cos 2x}{\cos 2x}$

$f(x) = 6\text{sen}2x$

$-1 < \text{sen}2x < 1$

$-6 < 6\text{senx} < 6$

$\Rightarrow \text{Ranf} = \langle -6; 6\rangle - \{0\}$

7 Halla el periodo de la siguiente expresión:
$G(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right) + \cos\left(\frac{24x - \pi}{5}\right) + \text{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)$

Resolución:

Dato:

$G(x) = \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right)}_{T_1} + \underbrace{\cos\left(\frac{24x}{5} - \frac{\pi}{5}\right)}_{T_2} + \underbrace{\text{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)}_{T_3}$

Se deduce que:

$T_1 = \frac{2\pi}{48} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{24}$; $T_2 = \frac{2\pi}{24/5} \Rightarrow T_2 = \frac{5\pi}{12}$; $T_3 = \frac{2\pi}{\frac{12}{7}} = \frac{7\pi}{6}$

$\text{MCM}(T_1, T_2, T_3) = \frac{\text{MCM}(\pi; 5\pi; 7\pi)}{\text{MCM}(24; 12; 6)} = \frac{35\pi}{6} \Rightarrow T_{G(x)} = \frac{35\pi}{6}$



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

CONCEPTOS PREVIOS

Antes de estudiar las funciones trigonométricas veamos las siguientes definiciones:

Función inyectiva

Una función es inyectiva cuando cada elemento del rango tiene un único elemento en el dominio al cual está asociado. Es decir: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Función sobreyectiva

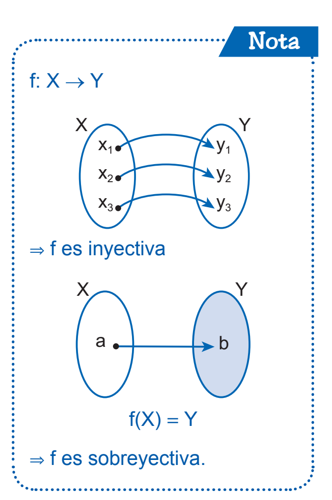
Una función f: X → Y, es sobreyectiva si y solo si para todo $y \in Y$ existe por lo menos un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Función inversa

Si una función es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva), entonces existe una función inversa.

Las funciones trigonométricas por ser funciones periódicas no son inyectivas, pero podemos restringir su dominio para así conseguir las funciones inversas.

Nota



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las restricciones de las funciones trigonométricas son:

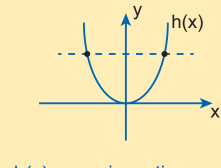
Función (F)	Dominio (F)	Rango (F)
y = senx	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	[–1; 1]
y = cosx	$[0; \pi]$	[–1; 1]
y = tanx	$\left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\langle-\infty; +\infty\rangle$
y = cotx	$\langle 0; \pi\rangle$	$\langle-\infty; +\infty\rangle$
y = secx	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{2}; \pi\right]$	$\langle-\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
y = cscx	$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$	$\langle-\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$



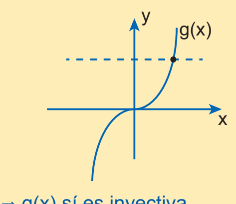
Recuerda

La gráfica de una función inyectiva es intersecada por cualquier recta horizontal en solo un punto.

Ejemplos:



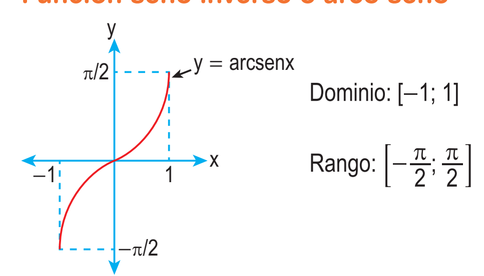
⇒ h(x) no es inyectiva



⇒ g(x) sí es inyectiva

Tomando en cuenta estas restricciones definimos las funciones inversas de las funciones trigonométricas

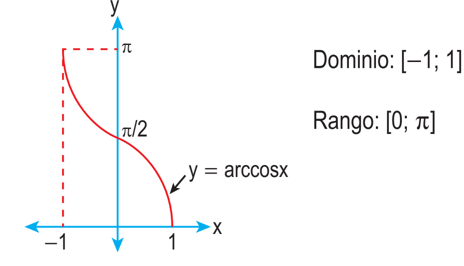
Función seno inverso o arco seno



Dominio: [–1; 1]

Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Función coseno inverso o arco coseno



Dominio: [–1; 1]

Rango: $[0; \pi]$

Ejemplo:

Determina el valor de las siguientes expresiones:

1. $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

2. $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\alpha = \text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha \in [0; \pi] \quad \therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}$

Importante

Para las inversas de las funciones trigonométricas se cumple:

$\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}x$

$\text{arccos}(-x) = \pi - \text{arccos}x$

$\text{arctan}(-x) = -\text{arctan}x$

$\text{arccot}(-x) = -\pi - \text{arccot}x$

$\text{arcsec}(-x) = \pi - \text{arcsec}x$

$\text{arccsc}(-x) = -\text{arccsc}x$



Nota

Hay diferentes formas de representar una función inversa, por ejemplo:

$\text{sen}^{-1}x = \text{arcsen}x$

$\text{cot}^{-1}x = \text{arccot}x$

La notación inversa $y = \text{sen}^{-1}x$ no debe confundirse con $\frac{1}{\text{sen}x}$, es decir:

$\text{sen}^{-1} \neq \frac{1}{\text{sen}x}$

Esto es, para todas las funciones trigonométricas inversas.



Recuerda

Propiedad

$\text{arctan}(a) + \text{arctan}(b) = \text{arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$

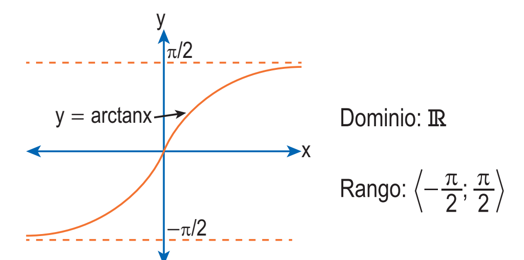
Donde:

Si: $ab < 1 \Rightarrow k = 0$

Si: $ab > 1$ y $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow k = 1$

Si: $ab > 1$ y $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow k = -1$

Función tangente inversa o arco tangente



Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Función cotangente inversa o arco cotangente

y = arccotx (gráfica: y; π; π/2; x)

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\langle 0; \pi \rangle$

Ejemplo:

Determina el valor de las siguientes expresiones:

1. $\text{arctan}(-1)$

   $\beta = \text{arctan}(-1)$

   $\Rightarrow \tan\beta = -1;\ \beta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

   $\therefore \beta = -\frac{\pi}{4}$

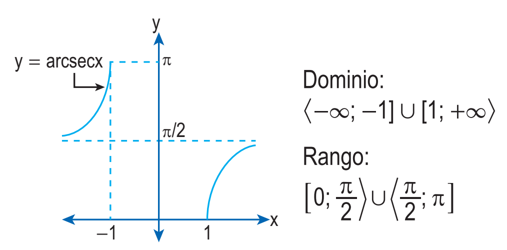
2. $\text{arccot}(\sqrt{3})$

   $\phi = \text{arccot}(\sqrt{3})$

   $\Rightarrow \cot\phi = \sqrt{3};\ \phi \in \langle 0; \pi \rangle$

   $\therefore \phi = \frac{\pi}{6}$

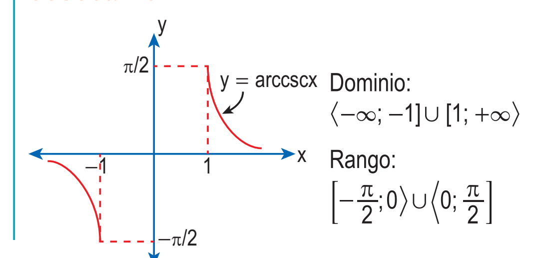
Función secante inversa o arco secante



Dominio: $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty \rangle$

Rango: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Función cosecante inversa o arco cosecante



Dominio: $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty \rangle$

Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo:

Determina el valor de las siguientes expresiones:

1. $\text{arcsec}(-\sqrt{2})$

   $\alpha = \text{arcsec}(-\sqrt{2})$

   $\Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{2}$

   $\therefore \alpha = \frac{3\pi}{4}$

2. $\text{arccsc}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

   $\beta = \text{arccsc}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

   $\Rightarrow \csc\beta = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad \therefore \beta = \frac{\pi}{6}$

Propiedades

1. $FT[\text{arcFT}(n)] = n;\ n \in \text{Dom (arc FT)}$

- $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x;\ x \in [-1; 1]$
- $\cos(\text{arccos}x) = x;\ x \in [-1; 1]$
- $\tan(\text{arctan}x) = x;\ x \in \mathbb{R}$
- $\sec(\text{arcsec}x) = x;\ x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
- $\csc(\text{arccsc}x) = x;\ x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$
- $\cot(\text{arccot}x) = x;\ x \in \mathbb{R}$

2. $\text{arcFT}[FT\theta] = \pi;\ \forall\theta \in \text{Ran(arcFT)}$

- $\text{arcsen}(\text{sen}x) = x;\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\text{arccos}(\cos x) = x;\ x \in [0; \pi]$
- $\text{arctan}(\tan x) = x;\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- $\text{arcsec}(\sec x) = x;\ x \in [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- $\text{arccsc}(\csc x) = x;\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
- $\text{arccot}(\cot x) = x;\ x \in \langle 0; \pi \rangle$

También se cumple:

- $\text{arcsen}x + \text{arccos}x = \frac{\pi}{2}$, si: $x \in [-1; 1]$
- $\text{arctan}x + \text{arccot}x = \frac{\pi}{2}$, si: $x \in \mathbb{R}$
- $\text{arcsec}x + \text{arccsc}x = \frac{\pi}{2}$, si: $x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

Problemas resueltos

1 Determina la gráfica, el dominio y el rango de las siguientes funciones inversas.

a) $y = 2\text{arcsen}x$ b) $y = 4\arccos\frac{x}{2}$

Resolución:

a) $y = 2\text{arcsen}x$

Sabemos que el dominio es: $[-1; 1]$

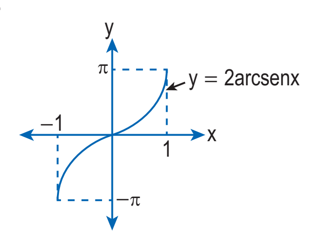
Para hallar el rango hacemos: $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}x \leq \frac{\pi}{2}$

Multiplicamos por 2:

$-\pi \leq \underbrace{2\text{arcsen}x}_{y} \leq \pi$

Entonces: Rango: $[-\pi; \pi]$

La gráfica es:



b) $y = 4\arccos\frac{x}{2}$

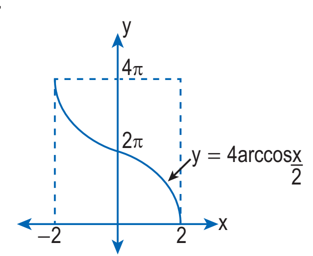
Hallamos el dominio:

$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow$ Dominio: $[-2; 2]$

Hallamos el rango:

$0 \leq \arccos\frac{x}{2} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \underbrace{4\arccos\frac{x}{2}}_{y} \leq 4\pi \Rightarrow$ Rango: $[0; 4\pi]$

La gráfica es:



2 Determina al valor de A si:

$A = \text{sen}\left[\arctan\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$

Resolución:

Sabemos por propiedad que:

$\arctan(-x) = -\arctan x$

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$

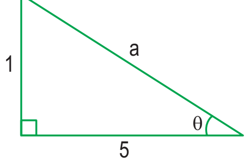
Aplicamos esto en A y obtenemos:

$A = \text{sen}\left[-\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right]$

$A = -\text{sen}\underbrace{\left[\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right]}_{\theta}$

Luego:

$\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \tan\theta = \left(\frac{1}{5}\right)$



$\Rightarrow a^2 = 5^2 + 1^2$

$a = \sqrt{26}$

$\Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$

Por lo tanto:

$A = -\text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{26}}{26}$

3 Calcula:

$Q = \frac{\arctan 3}{2\arctan(-3)}$

Resolución:

Piden:

$Q = \frac{\arctan 3}{2\arctan(-3)}$

Sabemos:

$\arctan(-x) = -\arctan x$, si: $x \in \mathbb{R}$

Como $3 \in \mathbb{R}$, entonces:

$\arctan(-3) = -\arctan 3$

Reemplazando en la expresión Q:

$\Rightarrow Q = \frac{\arctan 3}{2(-\arctan 3)} = -\frac{1}{2}$

$\therefore Q = -\frac{1}{2}$

4 Calcula:

$V = \text{sen}(\arctan\sqrt{3} + \text{arccsc}2)$

Resolución:

$V = \text{sen}(\underbrace{\arctan\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{3}} + \underbrace{\text{arc}\csc 2}_{\frac{\pi}{6}})$

$V = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right)$

$V = \text{sen}\frac{3\pi}{6} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V = 1$

5 Calcula:

$R = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

Resolución:

$R = \arctan\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{1}{7}}_{\frac{3}{28} < 1 \Rightarrow n = 0}}\right) + n\pi$

$$R = \arctan\left(\frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}\right) + 0$$

$R = \arctan 1 \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$

6 Calcula: $P = \tan(\arctan\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{4})$

Resolución:

Piden:

$P = \tan(\arctan\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{4})$

Sea: $\theta = \arctan\frac{3}{5} + \arctan\frac{1}{4}$

Por propiedad:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}}\right) + k\pi$$

Como: $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{20} < 1 \Rightarrow k = 0$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{20}}\right) + (0)\pi$$

$\Rightarrow \theta = \arctan 1 \Rightarrow \tan\theta = 1$

Entonces:

$P = \tan(\theta) = 1$

$\therefore P = 1$

7 Reduce:
$S = \text{sen}^2(\arccos\frac{1}{3})\sec^2(\arctan\sqrt{2})$

Resolución:

Piden:

$S = \text{sen}^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\sec^2(\arctan\sqrt{2})$

Sea:

$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$

$\theta = \arctan\sqrt{2} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2}$

Entonces:

$S = \text{sen}^2(\alpha)\sec^2(\theta)$

$S = (1 - \cos^2\alpha)(1 + \tan^2\theta)$

$$S = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\left(1 + (\sqrt{2})^2\right)$$

$\Rightarrow S = \left(\frac{8}{9}\right)(3) = \frac{8}{3} \qquad \therefore S = \frac{8}{3}$

8 Calcula:
$M = \text{sen}(\arctan\sqrt{5})\cos(\text{arccot}\,2\sqrt{2})$

Resolución:

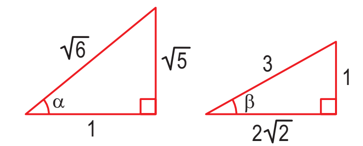
Piden:

$M = \text{sen}(\arctan\sqrt{5}) \,.\, \cos(\text{arccot}\,2\sqrt{2})$

Sea:

$\arctan\sqrt{5} = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{5}$

$\text{arccot}\,2\sqrt{2} = \beta \Rightarrow \cot\beta = 2\sqrt{2}$



Entonces:

$M = \text{sen}(\alpha) \,.\, \cos(\beta) = \text{sen}\alpha \,.\, \cos\beta$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{9}$$

$\therefore M = \frac{2\sqrt{15}}{9}$

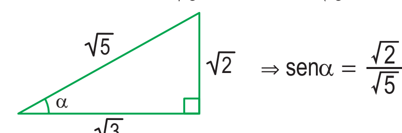
9 Calcula:
$\theta = \arctan\left(\cos\left(\arctan\left(\sqrt{5}\,\text{sen}\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\right)$

Resolución:

De la expresión:

$$\theta = \arctan\left(\cos\left(\arctan\left(\sqrt{5}\,\text{sen}\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\right)$$

Sea: $\alpha = \arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

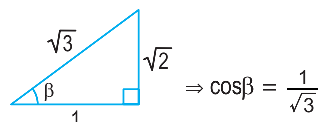
Luego:

$\theta = \arctan(\cos(\arctan(\sqrt{5} \,.\, \text{sen}\alpha)))$

$$\theta = \arctan\left(\cos\left(\arctan\left(\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)\right)$$

$\theta = \arctan(\cos(\arctan\sqrt{2}))$

Sea: $\arctan\sqrt{2} = \beta \Rightarrow \tan\beta = \sqrt{2}$



$\Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Entonces:

$\theta = \arctan(\cos\beta)$

$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN

Son igualdades condicionales que presentan funciones trigonométricas ligadas a una variable angular y se cumplen para un conjunto de valores angulares que hace posible la igualdad original.

Ejemplos:

- $\text{senx} = \frac{1}{2}$
- $\tan 5x = \frac{1}{3}$
- $\sec\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 4$
- $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cot(x + 18°) = 1$
- $\csc\left(\frac{\pi + x}{5}\right) = -1$

Nota

No son ecuaciones trigonométricas:

- $x\text{senx} = \frac{1}{2}$
- $\text{sen}(e^x) = \frac{1}{2}$
- $\tan x + \tan x^2 = 2$
- $e^x = \text{senx}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Son ecuaciones de la forma:

$$FT(Ax + B) = N$$

Donde:

FT: función trigonométrica

x: variable angular

N: valor admisible

Además A; B y N constantes con $A \neq 0$

Ejemplos:

- $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan\left(5x - \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sec\left(\frac{x}{9}\right) = 2$
- $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\cot\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$
- $\csc(x - \pi) = 5$

Observación

Se denomina ecuación trigonométrica no elemental a aquellas que no tienen la forma: FT(Ax + B) = N

Ejemplos:

- $\text{sen}^3x = \frac{1}{8}$
- $\cos 2x + 1 = \text{sen}3x$
- $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$



VALOR PRINCIPAL DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es aquel valor que pertenece al rango de la función inversa.

Sea la ecuación trigonométrica:

$$FT(Ax + B) = N$$

$$\Rightarrow VP = \text{arcFT}(N)$$

Donde:

FT	VP
sen	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
cos	$[0; \pi]$
tan	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Ejemplos:

- $\cos\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VP = \frac{\pi}{6}$
- $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow VP = \frac{\pi}{3}$
- $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = -\frac{\pi}{4}$

Atención

Se denomina valor principal (VP) al menor ángulo positivo o mayor ángulo negativo que satisface la ecuación trigonométrica elemental.

Ejemplos:

- $\text{senx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VP = \frac{\pi}{3}$
- $\cos 4x = 1 \Rightarrow VP = 0$
- $\tan 5x = -1 \Rightarrow VP = -\frac{\pi}{4}$
- $\cos 7x = -\frac{1}{2} \Rightarrow VP = \frac{2\pi}{3}$



SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Es un número real (ángulo expresado en radianes) que satisface la ecuación trigonométrica dada.

Ejemplos:

Observación

El valor $x_1 = \frac{\pi}{6}$ se denomina solución principal (SP), ya que es el menor valor no negativo que satisface la igualdad original.

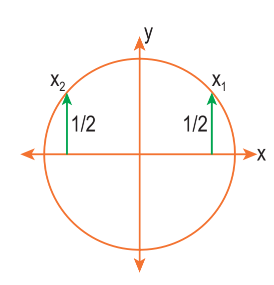


1. Resuelve la siguiente ecuación:

   $\text{sen}x = \frac{1}{2}$: para $x \in [0; 2\pi]$

   Resolución:

   Analizando en la CT:



Del gráfico se observa que los valores que satisfacen $\text{sen}x = \frac{1}{2}$, son:

$x_1 = \frac{\pi}{6}$ y $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ Las soluciones son: $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$

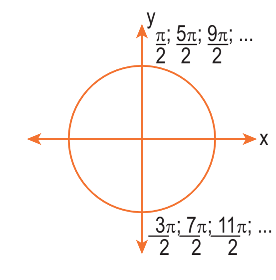


2. Resuelve la siguiente ecuación: $\cos 2x = 0$

   Resolución:

   Haciendo un cambio de variable $2x = \theta \Rightarrow \cos\theta = 0$

   Analizando en la CT:



Del gráfico se observa que todos los valores de θ son: $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; ...$

Los cuales en forma general se expresan como:

$\theta = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Luego: $2x = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$

Entonces: $x = (2n - 1)\frac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$

Observación

El valor $x = (2n - 1)\frac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$

Se denomina solución general (SG), ya que es la reunión de todos los valores angulares que hacen posible la igualdad original.



EXPRESIONES GENERALES

Para el seno: $E_G = k\pi + (-1)^k VP$

Para el coseno: $E_G = 2k\pi \pm VP$

Para la tangente: $E_G = k\pi + VP$

CONJUNTO SOLUCIÓN O SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es el conjunto de todos los valores angulares que satisfacen una ecuación trigonométrica. Para hallar la solución general se seguirán los siguientes pasos:

a) Se halla el VP de la ecuación y se reemplaza en la expresión general correspondiente.

b) Se iguala el ángulo $(Ax + B)$ en la expresión general hallada, de donde se despeja la variable (x) obteniéndose así el conjunto solución.

Problemas resueltos

1 Indica el conjunto solución:

$\text{sen}x = \frac{1}{2}$

Resolución:

$\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = \frac{\pi}{6}$

$E_G = k\pi + (-1)^k VP$

$\Rightarrow E_G = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$

2 Determina la solución principal de: $\text{sen}x + \cos x = 1$

Resolución:

$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = 1$

$\sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ Solución principal es 0.

3 Resuelve: $\text{sen}x - \cos x + \sec x = \csc x,\ x \in [0; 2\pi]$

Resolución:

$\text{sen}x - \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\text{sen}x},\ x \neq \frac{k\pi}{2}$

$\text{sen}x - \frac{1}{\text{sen}x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}$

$\frac{\text{sen}^2x - 1}{\text{sen}x} = \frac{\cos^2x - 1}{\cos x} \Rightarrow \frac{-\cos^2x}{\text{sen}x} = \frac{-\text{sen}^2x}{\cos x}$

$\cos^3x = \text{sen}^3x \Rightarrow \text{sen}x = \cos x$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$\therefore x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

4 Resuelve: $\text{sen}6x - \text{sen}4x = 2\text{sen}x$
Indica la solución general.

Resolución:

Sabemos:

$\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\ \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\Rightarrow \text{sen}6x - \text{sen}4x = 2\text{sen}x$

$2\cos5x\,\text{sen}x = 2\text{sen}x$

$2\text{sen}x(\cos5x - 1) = 0$

$\text{sen}x = 0 \ \vee\ \cos5x = 1$

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee 5x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2n\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}$

El conjunto solución es:

$CS = \{x/x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x/x = \frac{2n\pi}{5},\ n \in \mathbb{Z}\}$

5 Resuelve la ecuación:

$\cos2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, indica las soluciones comprendidas en $[0; 2\pi\rangle$.

Resolución:

$\cos\underbrace{2x}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2x = 2k\pi \pm VP = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$x = \pi k \pm \frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{8},\ x_1 = -\frac{\pi}{8}$ y $x_2 = \frac{\pi}{8}$

Si $k = 1 \Rightarrow x_3 = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$ y $x_4 = \pi + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$

Si $k = 2 \Rightarrow x_5 = 2\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}$ y $x_6 = 2\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{17\pi}{8}$

Tenemos que $\frac{17\pi}{8}$ es mayor de 2π, por lo tanto, las soluciones comprendidas en $[0; 2\pi\rangle$ son:

$\left\{\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}\right\}$

6 Indica la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$\text{sen}5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución:

$\text{sen}5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VP = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Luego:

$x_G = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right); k \in \mathbb{Z}$

$5x = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{3}$

$x \in \left\{\frac{k\pi}{5} - (-1)^k\frac{\pi}{15}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Evaluando:

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{15} = -12°$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{15} = 48°$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 60°$

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} = 120°$

Piden: $48° + 60° + 120° = 228°$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

> **Recuerda**
> Un triángulo oblicuángulo es aquel triángulo que no está formado por un ángulo de 90°.

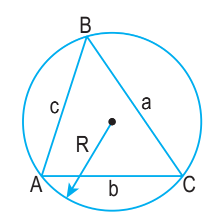


MÉTODO GENERAL

Para la resolución de triángulos oblicuángulos utilizaremos cuatro leyes trigonométricas: ley de senos, ley de cosenos, ley de tangentes y la ley de proyecciones.

I. Ley de senos

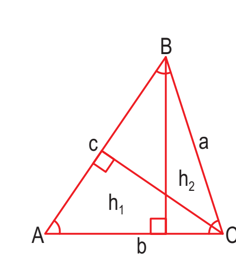
En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$$

Demostración:

Sea ABC un triángulo cualquiera. Trazamos las alturas h_1 y h_2 desde C y B, respectivamente.



$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}A = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b\,\text{sen}A \\ \text{sen}B = \frac{h_1}{a} \Rightarrow h_1 = a\,\text{sen}B\end{array}\right\} \begin{array}{l} a\,\text{sen}B = b\,\text{sen}A \\ \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \quad ...(1)\end{array}$$

También:

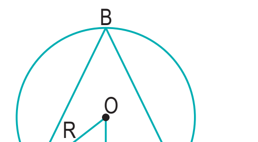
$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}A = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c\,\text{sen}A \\ \text{sen}C = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a\,\text{sen}C\end{array}\right\} \begin{array}{l} a\,\text{sen}C = c\,\text{sen}A \\ \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \quad ...(2)\end{array}$$

Luego, de (1) y (2), obtenemos: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$

> **Importante**
> De la ley de senos, tenemos:
> $a = 2R\text{sen}A$ $\quad b = 2R\text{sen}B$
> $c = 2R\text{sen}C$



Además, del siguiente gráfico tenemos:



R: circunradio

Del triángulo APO:

$$\text{sen}O = \frac{\frac{b}{2}}{R} = \frac{b}{2R}$$

Además: $m\angle B = m\angle O \Rightarrow \text{sen}B = \text{sen}O = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen}B}$

Por lo tanto: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$

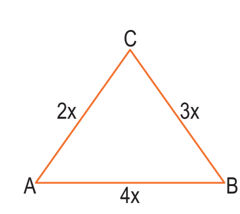


> **Importante**
> De la ley de cosenos tenemos:
> $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
> $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
> $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Ejemplo:

En un triángulo ABC se tiene: $a = 2x$; $b = 3x$; $c = 4x$; calcula: $M = \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} + \frac{\text{sen}B}{\text{sen}C} - \frac{\text{sen}A}{\text{sen}C}$

Resolución:



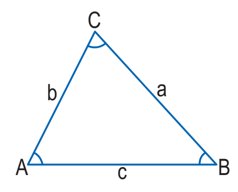
De la ley de senos se sabe que: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} = \frac{a}{b}$

De igual manera tenemos: $\frac{\text{sen}B}{\text{sen}C} = \frac{b}{c} \wedge \frac{\text{sen}A}{\text{sen}C} = \frac{a}{c}$

Luego: $M = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{2x}{3x} + \frac{3x}{4x} - \frac{2x}{4x} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$

II. Ley de cosenos

En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos; menos el doble del producto de esos lados por el coseno del ángulo que forman.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

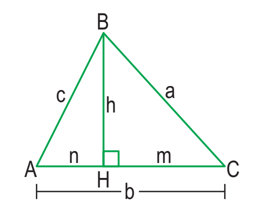
Atención

Para realizar la demostración de las otras dos relaciones, solo bastará colocar los ángulos B y C en posición normal, el resto se realiza de manera análoga.



Demostración:

Realizaremos la demostración para el primer caso, con los demás casos se procederá de manera análoga.



Del triángulo:

$a^2 = h^2 + m^2$ ...(1)

Del triángulo AHB:

$\text{sen}A = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\,\text{sen}A$ ...(2)

$\cos A = \frac{n}{c} \Rightarrow n = c\cos A$

Además:

$b = m + n \Rightarrow m = b - n = b - c\cos A$ ...(3)

Luego reemplazamos (2) y (3) en (1):

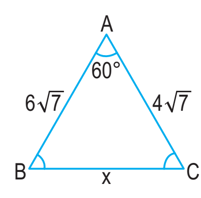
$a^2 = (c\,\text{sen}A)^2 + (b - c\cos A)^2 = c^2\text{sen}^2A + b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2A$

$a^2 = c^2(\text{sen}^2A + \cos^2A) + b^2 - 2bc\cos A$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Ejemplo:

Del gráfico, calcula x:



Resolución:

Aplicamos ley de cosenos:

$x^2 = (6\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{7})^2 - 2(6\sqrt{7})(4\sqrt{7})\cos 60°$

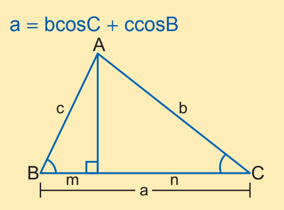
$x^2 = 36 \,.\, 7 + 16 \,.\, 7 - 48 \,.\, 7 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$

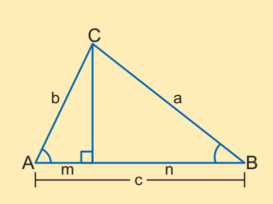
Observación

Para la demostración de las dos proyecciones restantes debes tomar en cuenta los siguientes gráficos:

$a = b\cos C + c\cos B$

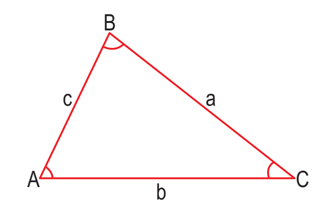


$c = a\cos B + b\cos A$



III. Ley de proyecciones

En todo triángulo se cumple que cada lado es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos lados sobre él.

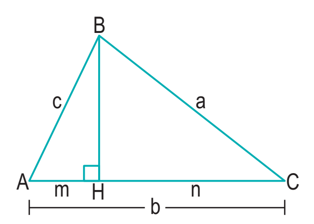




$a = b\cos C + c\cos B$ $b = a\cos C + c\cos A$ $c = a\cos B + b\cos A$

Demostración:

Dado el triángulo ABC, trazamos $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AC}$.



En el triángulo AHB: $\cos A = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c\cos A$

En el triánguo BHC: $\cos C = \dfrac{n}{a} \Rightarrow n = a\cos C$

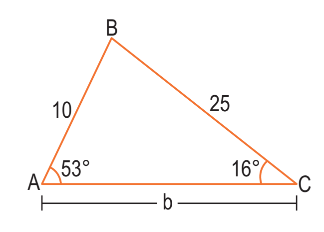
Además:

$b = m + n$

$\Rightarrow b = c\cos A + a\cos C$

Ejemplo:

Dado el siguiente triángulo calcula AC.



Resolución:

Aplicando proyecciones tenemos:

$AC = b = 25\cos 16 + 10\cos 53°$

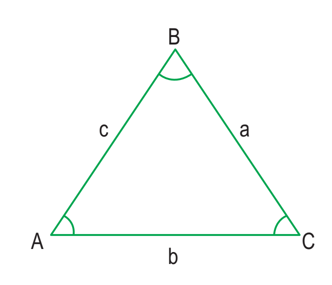
$$b = 25\frac{24}{25} + 10\frac{3}{5}$$

$$b = 24 + 6 = 30$$

$\Rightarrow AC = 30$

IV. Ley de tangentes

En todo triángulo se cumple que la suma de dos de sus lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados es proporcional a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos. Es decir:



$$\frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)} = \frac{a+c}{a-c}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{b+c}{b-c}$$

Demostración:

Para realizar esta demostración empezaremos recordando la ley de senos y propiedades de proporcionalidad.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}$$

Luego:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B}$$

Aplicamos transformaciones trigonométricas:

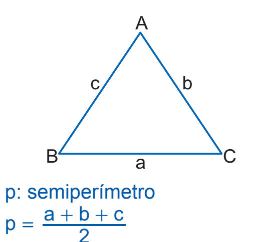
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right).\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Las demás igualdades se demuestran de forma análoga.



Nota

En todo triángulo, respecto a sus ángulos se cumple:



p: semiperímetro

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

1. Seno:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

2. Coseno:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

3. Tangente:

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$



Problemas resueltos

1 En un triángulo ABC, AB = 3; AC = 5 y $\cos A = \frac{2}{5}$. Halla el valor de BC.

Resolución:

Por ley de cosenos, tenemos:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos A$

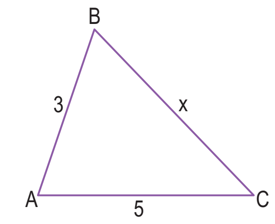
$x^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos A$

$x^2 = 9 + 25 - 30\cos A$

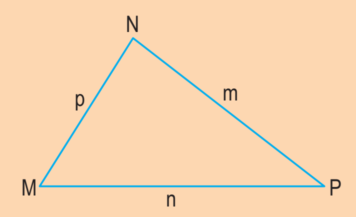
$x^2 = 34 - 30\left(\frac{2}{5}\right)$

$x^2 = 34 - 12 = 22$

$\therefore x = \sqrt{22}$



2 Del siguiente triángulo:



Halla el valor de: $k = \dfrac{m - n\cos P}{\cos N}$

Resolución:

Por ley de cosenos tenemos:

$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos P$

$\Rightarrow \dfrac{p^2 - m^2 - n^2}{2m} = -n\cos P$

$n^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos N$

$\Rightarrow \cos N = \dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp}$

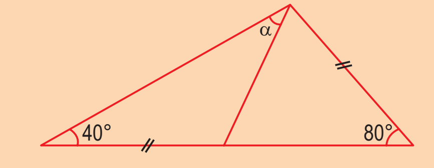
Reemplazamos en "k".

$k = \dfrac{m - n\cos P}{\cos N}$

$k = \dfrac{m + \dfrac{p^2 - m^2 - n^2}{2m}}{\dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp}} = \dfrac{\dfrac{2m^2 + p^2 - m^2 - n^2}{2m}}{\dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp}}$

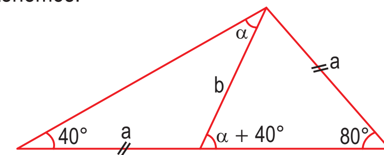
$k = \dfrac{(m^2 + p^2 - n^2)p}{m^2 + p^2 - n^2} \Rightarrow k = p$

3 Del gráfico, calcula α.



Resolución:

Del gráfico tenemos:



Por ley de senos:

$\dfrac{b}{\text{sen}40°} = \dfrac{a}{\text{sen}\alpha} \quad \wedge \quad \dfrac{b}{\text{sen}80°} = \dfrac{a}{\text{sen}(\alpha + 40°)}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{sen}40°}{\text{sen}\alpha} \quad \wedge \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{sen}80°}{\text{sen}(\alpha + 40°)}$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}40°}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{\text{sen}80°}{\text{sen}(\alpha + 40°)}$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}40°}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{2\text{sen}40°\cos 40°}{\text{sen}(\alpha + 40°)}$

$\text{sen}(\alpha + 40°) = 2\text{sen}\alpha\cos 40°$

$\text{sen}(\alpha + 40°) = \text{sen}(\alpha + 40°) + \text{sen}(\alpha - 40°)$

$\text{sen}(\alpha - 40°) = 0$

$\alpha - 40° = 0°$

$\therefore \alpha = 40°$

4 En un triángulo MNP de lados m, n y p, respectivamente, se cumple:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 16$$

Calcula:

$R = np\cos M + mp\cos N + mn\cos P$

Resolución:

Por ley de cosenos, tenemos:

$m^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos M$

$2np\cos M = n^2 + p^2 - m^2$

$\Rightarrow np\cos M = \dfrac{n^2 + p^2 - m^2}{2}$ ...(1)

$\Rightarrow mp\cos N = \dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2}$ ...(2)

$\Rightarrow mn\cos P = \dfrac{m^2 + n^2 - p^2}{2}$ ...(3)

Reemplazamos (1), (2) y (3) en R:

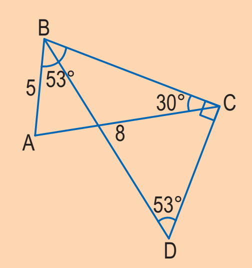
$R = \dfrac{n^2 + p^2 - m^2}{2} + \dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2} + \dfrac{m^2 + n^2 - p^2}{2}$

$R = \dfrac{n^2 + p^2 - m^2 + m^2 + p^2 - n^2 + m^2 + n^2 - p^2}{2}$

$R = \dfrac{m^2 + n^2 + p^2}{2} = \dfrac{16}{2}$

$\therefore R = 8$

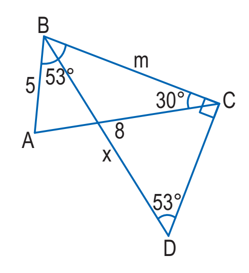
5 Del siguiente gráfico:



Halla el valor de BD.

Resolución:

- Del gráfico, tenemos:



En el triángulo ABC aplicamos ley de proyecciones.

$m = 5\cos 53° + 8\cos 30°$

$m = 5\left(\frac{3}{5}\right) + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 4\sqrt{3}$

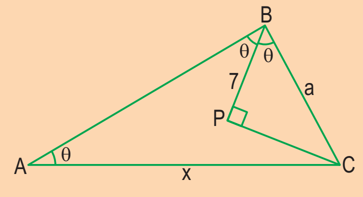
En el triángulo BCD aplicamos ley de senos.

$\frac{x}{\text{sen}90°} = \frac{m}{\text{sen}53°}$

$\frac{x}{1} = \frac{3+4\sqrt{3}}{\frac{4}{5}}$

$\therefore\ x = \frac{(15+20\sqrt{3})}{4}$

6 En la figura, halla x.



Resolución:

En el $\triangle$ABC, aplicamos ley de senos:

$\frac{a}{\text{sen}\theta} = \frac{x}{\text{sen}2\theta} \Rightarrow x = \frac{a(2\text{sen}\theta\cos\theta)}{\text{sen}\theta}$

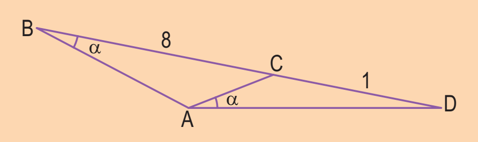
$\Rightarrow x = 2a\cos\theta$ ...(1)

En el ⊿BPC: $\cos\theta = \frac{7}{a}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

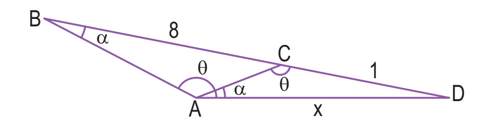
$x = 2a\left(\frac{7}{a}\right) \Rightarrow x = 14$

7 Calcula AD, si:



Resolución:

Sea: AD = x, m∠ACD = θ = m∠BAD



Luego por ley de senos:

$\frac{x}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow x = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}$

$\frac{x}{\text{sen}\alpha} = \frac{9}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}$

Igualando: $\frac{x}{1} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 9$

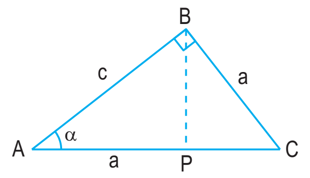
$\therefore x = 3$

8 En un triángulo rectángulo ABC uno de los catetos es igual a la proyección del otro sobre la hipotenusa. Halla el seno del menor ángulo.

Resolución:

Sea α el menor ángulo.

La proyección de $\overline{AB}$ sobre la hipotenusa es $\overline{AP}$, por dato: AP = BC = a



En el ⊿APB: $\frac{a}{c} = \cos\alpha \Rightarrow a = c\cos\alpha$

En el ⊿ABC: $\frac{a}{c} = \tan\alpha \Rightarrow a = c\tan\alpha$

Igualamos estas dos expresiones:

$c\cos\alpha = c\tan\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \tan\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \text{sen}\alpha \Rightarrow 1 - \text{sen}^2\alpha = \text{sen}\alpha$

$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2}$

Como α es agudo $\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$